俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

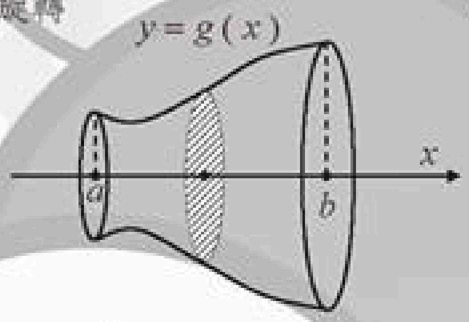
俞克斌老師編寫

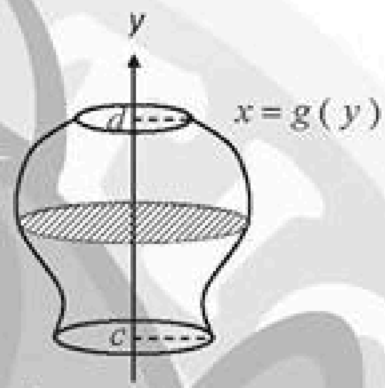
倒數 75 天 ： 體積(1)

觀念篇

旋轉體體積：

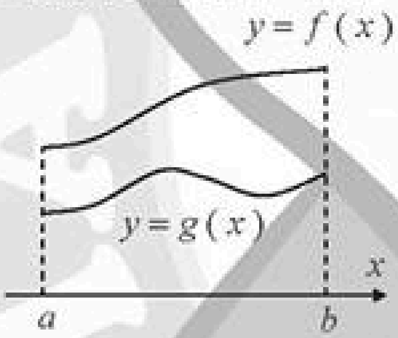
①繞 x 軸旋轉 ②繞 y 軸旋轉





旋轉體體積為 $\int_a^b \pi[g(x)]^2 dx$ 旋轉體體積為 $\int_c^d \pi[g(y)]^2 dy$

③環狀體（甜甜圈、輪胎、戒指）



在區間 $[a,b]$ 中，$f(x)\ge g(x)\ge 0$

旋轉體體積為 $\int_a^b \left[\pi\left(f(x)\right)^2-\pi\left(g(x)\right)^2\right]dx$

$\neq \int_a^b \pi[f(x)-g(x)]^2\ dx$

特別注意

例題篇：鑑往之傾向

1. 將曲線 $y=\sqrt{1+\dfrac{x^3}{100}}$，$2\le x\le 20$，繞 x 軸旋轉所得旋轉體的體積為________。
以此旋轉體做成容器裝水，然後再將水倒入某球體容器恰好填滿（容器厚度不計），則此球體容器之半徑為________。【82 日自】

答：(1) $\dfrac{10449\pi}{25}$ (2) $\sqrt[3]{\dfrac{31347}{100}}$

例題篇：知來之對策

1. 求橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 繞 x 軸旋轉所得之旋轉體的體積為________。

2. 工廠選取不同的正數k，再由兩拋物線$y^2=4x$與$y^2=8(x-k)$所圍成的區域繞x軸旋轉所得的旋轉體設計出一系列多款的容器，
證明：每一款容器之材料的體積與該容器的容積都相等。

3. 求球$x^2+y^2+z^2=1$與球$x^2+(y-1)^2+z^2=\frac{1}{9}$共同部分的體積。