

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 72 天 : 積分技巧(2)

觀念篇

例題篇：鑑往之傾向

1. 設 a 、 b 為實數， $f(x)$ 為 5 次實係數多項式且其最高次項係數為 a 。

若 $f(x)$ 滿足 $\int_b^x f(t) dt = \frac{3}{2}(x^2 + 4x + 5)^3 - \frac{3}{2}$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【104 數甲】

答： $a = 9$ ； $b = -2$

2. 設 $p(x)$ 為一實係數多項式，其各項係數均大於或等於 0。

在坐標平面上，已知對所有的 $t \geq 1$ ，函數 $y = p(x)$ 、 $y = -1 - x^2$ 的圖形與直線 $x = 1$ 、 $x = t$ 所圍成有界區域的面積為 $t^4 + t^3 + t^2 + t + C$ (其中 C 為常數)。

(1) 試說明 $p(x) > -1 - x^2$ 對所有的 $x \geq 1$ 均成立。(2 分)

(2) 設 $t \geq 1$ ，試求 $\int_1^t (-1 - x^2) dx$ 。(3 分)

(3) 試求 C 。(2 分)

(4) 試求 $p(x)$ 。(5 分)

【102 數甲】

答：(2) $-\frac{t^3}{3} - t + \frac{4}{3}$ (3) $C = -4$ (4) $p(x) = 4x^3 + 2x^2 + 2x$

例題篇：知來之對策

1. 若函數 $f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{3}t^2 + 2at + b \right) dt$ 在 $x = -2$ 有極值且 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ ，則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

2. 若實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + x + \int_k^x f(t) dt$ ：

(1) 試求 $\deg f(x)$ 。

(2) 試求 $f(x)$ 。

(3) 若 $k < 0$ ，試求 k 之值。

(4) 試計算 $\int_{-3}^2 f(x) dx$ 之值。

3. 已知函數 $f(x) = \int_{-3}^x (t^2 - t - 2) dt$ ，其中 $-3 \leq x \leq 3$ ，則下列哪些選項是正確的？

(1) $f(0) = -12$ (2) 函數 $f(x)$ 在區間 $(-1, 2)$ 為遞增函數

(3) $y = f(x)$ 的圖形在區間 $(-3, -1)$ 為凹口向下 (4) 函數 $f(x)$ 在 $x = 3$ 處有相對極大值

(5) 函數 $f(x)$ 的最大值為 6。

