俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 71 天：期望值(1)

觀念篇

期望值：

令X是離散型的隨機變數，其值為x_i，$1\le i\le n$，$n\in N$，且$f(x_i)$為X的機率函數，

則隨機變數X的期望值$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)$

其意義是：多次操作該試驗，所得隨機變數之值的平均數

可以看成是隨機變數X之值的加權平均數。

例題篇：鑑往之傾向

1. 設隨機變數X表示投擲一不公正骰子出現的點數，
$P(X=k)$表示隨機變數X取值為k的機率。
已知X的機率分布如下表：（x,y為未知常數）

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	x	y	y	x	y	y

又知X的期望值等於3。
(1) 試求x、y之值。
(2) 投擲此骰子兩次，試求點數和為3的機率。 【105 數乙】

答：(1) $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{18}$

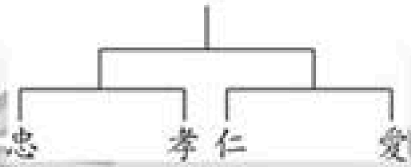
2. 袋中有3顆白球與1顆黑球，每次隨機從袋中抽出1球，
袋中每一球被抽到的機率皆相同，抽出後不放回，直到抽中黑球時遊戲結束。
若在第k次抽到黑球，則得到k元獎金。
此遊戲可獲得獎金的數學期望值為________元（化為最簡分數）。 【102 數乙】

答：$\frac{5}{2}$

3. 一圓盤分成標有數字0、1的兩區域，且圓盤上有一可轉動的指針。
已知每次轉動指針後，前後兩次指針停在同一區域的機率為$\frac{1}{4}$，
而停在不同區域的機率為$\frac{3}{4}$。遊戲規則為連續轉動指針三次，
計算指針在這三次所停區域的標號數字之和。
若遊戲前指針的位置停在標號數字為1的區域，
則此遊戲的期望值為________。（化成最簡分數） 【105 數甲】

答：$\frac{21}{16}$

4. 某高中一年級有忠、孝、仁、愛四班的籃球隊，擬由經抽籤決定的下列賽程進行單淘汰賽（輸一場即被淘汰）：



假設忠班勝過其他任何一班的機率為$\frac{4}{5}$，孝班勝過其他任何一班的機率為$\frac{1}{5}$，

仁、愛兩班的實力相當，勝負機率各為$\frac{1}{2}$。若任一場比賽皆須分出勝負，沒有和局。

如果冠軍隊可獲得6000元獎學金，亞軍隊可獲得4000元獎學金，

則孝班可獲得獎學金的期望值為________元。【106 數甲】

答：880

5. 袋中有紅色代幣 4 枚、綠色代幣 9 枚、以及藍色代幣若干枚。每一枚紅色、綠色、藍色代幣分別可兌換 50 元、20 元以及 10 元。現從袋中取出代幣，每一枚代幣被取出的機會均等。

設隨機變數X代表取出 1 枚代幣可兌換的金額(單位：元)；

隨機變數Y代表一次取出 2 枚代幣可兌換(單位：元)。

已知的期望值為 20。

(1)試問藍色代幣有多少枚？ (2)試問$Y \le 50$的機率$P\left(Y \le 50\right)$為何？【106 數乙】

答：(1) 12 (2)$\frac{7}{10}$

6. 有一個不公正的骰子，投擲一次出現1點的機率與出現3點的機率之和是0.2，出現2點的機率與出現4點的機率之和是0.4，出現5點的機率與出現6點的機率之和是0.4。試選出正確的選項：

(1)出現1點的機率是0.1 (2)出現4點的機率大於出現3點的機率

(3)出現偶數點的機率是0.5 (4)出現奇數點的機率小於0.5

(5)投擲點數的期望值至少是3。【106 數乙】

答：(5)

例題篇：知來之對策

1. 某種彩券號碼是 5 位數，各獎項之獎金與名額如右：請問這種彩券一張的期望值是多少？

獎 項	獎金(百元)	名額
特 獎	10000	1
頭 獎	1000	5
第二獎	100	10
第三獎	50	50
第四獎	10	100
第五獎	5	200

2. A,B 兩箱中各有 2440 元，
A 箱中有千元大鈔 2 張，百元大鈔 4 張，十元鈔票 4 張，
B 箱中有伍百元大鈔 4 張，五十元鈔票 8 張，十元鈔票 4 張，
甲乙分別由 A 箱，B 箱中任取一張，則各人取得之期望值何者較大？