

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 67 天 : 平移伸縮

### 觀念篇

隨機變數  $X$  經過線性變換後得  $Y = aX + b$ ，其中  $a$ 、 $b$  為常數

期望值的線性變換： $E(Y) = aE(X) + b$

標準差的線性變換： $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$

變異數的線性變換： $Var(Y) = a^2 Var(X)$

### 例題篇：鑑往之傾向

1. 摸彩箱裝有若干編號為  $1, 2, \dots, 10$  的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。

今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。

現有甲、乙兩案：

甲案為當摸得彩球的號數為  $k$  時，其所獲報酬同為  $k$ ；

乙案為當摸得彩球的號數為  $k$  時，其所獲報酬為  $11 - k$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ )。

已知依甲案每摸取一球的期望值為  $\frac{67}{14}$ ，

則依乙案每摸取一球的期望值為\_\_\_\_\_。（化成最簡分數）【96學測】

答： $\frac{87}{14}$

### 例題篇：知來之對策

1. 設一袋中有 1 個 1 號球，2 個 2 號球， $\dots$ ， $n$  個  $n$  號球。

現自袋中任取一球，設每一個球被取到的機會都相等，

(1) 取得  $n$  號球可得  $n$  元。則任取一球的期望值為\_\_\_\_\_元。

(2) 取得  $n$  號球可得  $2n$  元。則任取一球的期望值為\_\_\_\_\_元。

(3) 取得  $n$  號球可得  $3n - 4$  元。則任取一球的期望值為\_\_\_\_\_元。

(4) 取得  $n$  號球可得  $100 - n$  元。則任取一球的期望值為\_\_\_\_\_元。

2. 已知隨機變數  $X$ ，滿足期望值  $E(-2X + 8) = -12$ ， $E(X^2) = 121$ ，

則下列哪些選項是正確的？

(1)  $E(X) = 10$  (2)  $E(X) = 11$  (3) 變異數  $Var(X) = 21$  (4)  $E(X^2) = [E(X)]^2$

(5) 標準差  $\sigma_X = 11$ 。

3. 已知  $X$  和  $Y$  是兩個相互獨立的隨機變數， $X \in \{1, 2\}$ ， $Y \in \{1, 3\}$ 。  
若  $P(X=1)=0.7$ 、 $P(Y=1)=0.4$ ，且變數  $Z=2X-Y$ ，則期望值  $E(Z)=$ \_\_\_\_\_。

4. 有一顆不公正的四面體骰子，四個面分別標示  $1, 2, 3, 4$ 。設  $X$  表示出現的點數，若出現點數  $X$  的機率為  $\frac{X}{m}$ ，期望值為  $E(X)$ ，變異數為  $Var(X)$ ，現投擲此顆不公正的四面體骰子一次，選出下列正確的選項。

- (1)  $m=10$       (2)  $P(X=3)=0.3$       (3)  $E(2X+1)=6$   
(4)  $Var(X)=1$       (5)  $Var(2X) > Var(-3X)$ 。



KATA S  
俞克斌數