

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 64 天 : 二項分佈期望值、標準差

### 觀念篇

二項分布的期望值、變異數與標準差：

設二項分布  $X \sim B(n, p)$ ，則：

期望值： $\mu = E(X) = np$

變異數： $Var(X) = np(1-p)$

標準差： $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

### 例題篇：鑑往之傾向

1. 假設某棒球隊在任一局發生失誤的機率都等於  $p$  (其中  $0 < p < 1$ )，且各局之間發生失誤與否互相獨立。令隨機變數  $X$  代表一場比賽 9 局中出現失誤的局數，且令  $p_k$  代表 9 局中恰有  $k$  局出現失誤的機率  $P(X=k)$ 。已知  $p_4 + p_5 = \frac{45}{8}p_6$ ，則該球隊在一場 9 局的比賽中出現失誤局數的期望值\_\_\_\_\_。(化為最簡分數) 【107 數甲】

答： $\frac{18}{5}$

### 例題篇：知來之對策

1. 今年高一共有 6 個班，學校規定高一每一班必須進行教室佈置，已知每班在開學一週內完成教室佈置的機率均為  $p$ ，且每班完成與否互不影響，設隨機變數  $X$  表示高一在開學一週內完成教室佈置的班級數，若隨機變數  $X$  的期望值為 2 班，試求：
- (1)  $p$  之值。
  - (2) 高一在開學一週內，恰有 2 個班級完成教室佈置的機率。
  - (3) 隨機變數  $X$  的標準差。
2. 一張考卷中有 10 題是非題，正確的答案記  $\circ$ ，不正確的答案記  $\times$ 。小美每一題都隨機填入一個  $\circ$  或一個  $\times$ ，試問下列選項何者正確？
- (1) 全部答對的機率大於 0.001
  - (2) 至少答對一題的機率小於 0.999
  - (3) 至少答對五題的機率等於 0.5
  - (4) 假設每題 10 分，則小美此張考卷分數的期望值為 50 分
  - (5) 小美答對題數的標準差是 2.5 題。

3. 某重複試驗每次成功的機率為  $p$ ，失敗的機率為  $1-p$ ，今連續做 2 次試驗，其中隨機變數  $X$  表示成功的次數，若已知  $P(X \geq 1) = \frac{8}{9}$ ，試問：

(1) 成功的機率  $p$  值為多少？

(2) 2 次重複試驗的數學期望值  $E(X)$  為多少？

(3) 若欲使得此試驗中至少成功一次的機率大於 0.99，則至少需做幾次試驗？

(已知  $\log 3 \approx 0.4771$ )

4. 阿彬因為每天晚上與女朋友熱線到半夜，所以每天早自修都有  $\frac{2}{3}$  的機率會遲到，且每天早自修是否會遲到為互相獨立。已知該校每週上課日有 5 天早自修，一學期共有 18 週上課日，毛老師規定學生每週上課日只要有 3 天以上（包含 3 天）的早自修遲到，就以記一次愛校服務作為處罰。設隨機變數  $X$  表示阿彬於一週上課日的早自修遲到之天數，而隨機變數  $Y$  表示阿彬於一學期上課日因為早自修遲到而被記愛校服務的次數，則：

(1) 阿彬於一週當中有多少的機率會因為早自修遲到而被記愛校服務？

(2) 試求隨機變數  $X$  的期望值？

(3) 試求隨機變數  $Y$  的期望值？

5. 連續投擲一枚均勻的硬幣 5 次，以隨機變數  $X$  表示硬幣出現正面的次數。

令  $E(X) = \mu$  為  $X$  的期望值， $\sqrt{\text{Var}(X)} = \sigma$  為  $X$  的標準差。請選出正確的選項：

(1)  $P(X=2) = P(X=3)$  (2)  $P(X=2) = \frac{11}{32}$  (3)  $X$  的期望值為 2

(4)  $X$  的標準差為  $\frac{5}{4}$  (5)  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \frac{5}{8}$ 。

6. 設箱中有 200 顆紅球，100 顆白球，某甲從箱子中隨機取出 1 顆球，記錄球的顏色後放回，重複此動作 5 次，設  $X$  表示取到紅球的次數。

(1) 試求機率  $P(X=3)$ 。

(2) 設  $\mu$  為此試驗的期望值， $\sigma$  為標準差，試求  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$  範圍內的機率。

7. 一袋中有 2 顆黑色球，2 顆白色球，每次從袋中任取兩顆球，取後放回，共取 3 次，令隨機變數  $X$  表示抽到兩球為一黑球一白球的次數，則下列哪些選項正確？

(1) 期望值  $E(X) = \mu = 2$

(2)  $E(5X - 3) = 10$

(3) 變異數  $\text{Var}(X) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(4)  $\text{Var}(-3X + 5) = 6$

(5)  $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \frac{2}{3}$  (其中  $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ )。