

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 62 天：民意調查

觀念篇

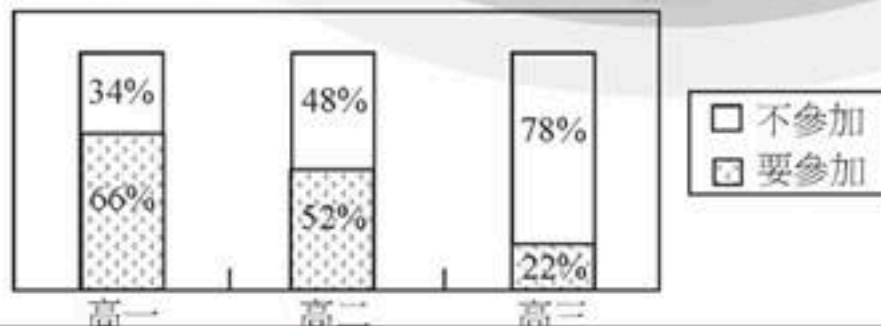
- (1) 考慮一組 n 個 0、1 的數據 (1 表示成功，0 表示失敗)，母體成功比率為 P ，但 P 真值無法確知，故以抽樣成功比率 \hat{p} 來估計母體成功比率 P 。
- (2) 中央極限定理：
從平均數為 μ ，標準差為 σ 的母體中，多次隨機抽出 n 個樣本，其樣本平均數的隨機變數 \bar{X} 經標準化後的分布，會趨近標準常態分布 $X \sim N(0, 1)$
- (3) 信賴區間與信心水準：
依經驗法則 (或稱 68%、95%、99.7% 法則)，
可推算 \hat{p} 加減 1~3 個標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 的區間 (稱為信賴區間)
涵蓋母體成功比率 P 的比率，此比率即為信心水準。
其中 1~3 個標準差稱為抽樣誤差 e ，而信賴區間則為 $[\hat{p}-e, \hat{p}+e]$ 。

例題篇：鑑往之傾向

1. 某廠商委託民調機構在甲、乙兩地調查聽過某項產品的居民佔當地居民之百分比 (以下簡稱為「知名度」)。結果如下：在 95% 信心水準之下，該產品在甲、乙兩地的知名度之信賴區間分別為 $[0.50, 0.58]$ 、 $[0.08, 0.16]$ 。
試問下列哪些選項是正確的？
 - (1) 甲地本次的參訪者中，54% 的人聽過該產品
 - (2) 此次民調在乙地的參訪人數少於在甲地的參訪人數
 - (3) 此次調查結果可解讀為：甲地全體居民中有一半以上的人聽過該產品的機率大於 95%
 - (4) 若在乙地以同樣方式進行多次民調，所得知名度有 95% 的機會落在區間 $[0.08, 0.16]$
 - (5) 經密集廣告宣傳後，在乙地再次進行民調，並增加參訪人數達原人數的四倍，則在 95% 信心水準之下該產品的知名度之信賴區間寬度會減半 (即 0.04)。【98 學測】

答：(1)(2)

2. 某縣市教育局欲瞭解高中生參加課外活動社團的意願，開學日隨機調查高一、高二、高三學生各 1067 名，詢問本學期是否要參加課外活動社團。已知該縣市的高一、高二、高三學生人數幾乎一樣多，各年級學生調查結果如下圖：



試問下列選項中的敘述，哪些是正確的？

- (1) 學生要參加課外活動社團之比例隨著年級增加而遞減
- (2) 由上述資訊可以估算全體學生要參加課外活動社團的比例
- (3) 在 95% 信心水準下，每一個年級學生要參加課外活動社團的比例之信賴區間，都可以由題目中已知的數據算出
- (4) 在 95% 信心水準下，三個年級的調查結果，以高一學生要參加課外活動社團的比例的信賴區間最長
- (5) 在 95% 信心水準下，三個年級的調查結果，以高三學生要參加課外活動社團的比例的信賴區間最短【98 數乙】

答：(1)(2)(3)(5)

3. 想要了解台灣的公民對某議題支持的程度所作的抽樣調查，依性別區分，所得結果如下表：

	女性公民	男性公民
贊成此議題的比例 \hat{p}	0.52	0.59
\hat{p} 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	0.02	0.04

請問從此次抽樣結果可以得到下列哪些推論？

- (1) 全台灣男性公民贊成此議題的比例大於女性公民贊成此議題的比例
- (2) 在 95% 的信心水準之下，全台灣女性公民贊成此議題之比例的信賴區間為 [0.48, 0.56] (計算到小數點後第二位，以下四捨五入)
- (3) 此次抽樣的女性公民數少於男性公民數
- (4) 如果不區分性別，此次抽樣贊成此議題的比例 \hat{p} 介於 0.52 與 0.59 之間
- (5) 如果不區分性別，此次抽樣 \hat{p} 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 介於 0.02 與 0.04 之間

【99 學測】

答：(2)(4)

4. 為講解信賴區間與信心水準，

數學老師請全班 40 位同學使用老師提供的亂數表模擬投擲均勻銅板 16 次。模擬的過程如下：隨機指定給每位同學亂數表的某一行，該行由左至右有 16 個數字，如果數字為 0、1、2、3、4，對應投擲銅板得到正面；而數字為 5、6、7、8、9 時，對應投擲銅板得到反面。某同學拿到的一列數字依序為：0612 9683 4251 9138 該同學計算銅板出現正面機率在 95% 信心水準下的信賴區間：

$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

則該同學所得到的結果中， $2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} =$ _____ 【100 數乙】

答： $\frac{3\sqrt{7}}{32}$

5. 想要了解選民對某候選人真正的支持度(支持率) p ，
 四家媒體所做的民意調查結果如下表所示：

	媒體A	媒體B	媒體C	媒體D
\hat{p}	0.30	0.40	0.30	0.28
$\hat{\sigma}$	0.02	$\hat{\sigma}_B$	0.01	0.01

其中 \hat{p} 表示抽樣支持度， $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ， n 為抽樣人數。請選出正確的選項。

- (1) 在95%的信心水準下，媒體A抽樣所得的 p 的信賴區間為 $[0.28, 0.32]$
- (2) 如果媒體B抽樣的人數與媒體A相同，則 $\hat{\sigma}_B$ 大於0.02
- (3) 媒體C抽樣人數約為媒體A抽樣人數的兩倍
- (4) 媒體A的抽樣支持度比媒體B的抽樣支持度更接近候選人真正的支持度 p
- (5) 在95%的信心水準之下，
 至少有一家媒體抽樣所得 p 的信賴區間會包含真正的支持度 p 【102指乙】

答：(2)

例題篇：知來之對策

1. 政府欲推行國三學生基測由兩次改為一次，委託民意調查機構作調查，成功訪問了1100位學生家長，其中有605位的學生家長贊成改為一次，在95%的信心水準下，誤差為正負3%，試問下列敘述何者正確？
 - (1) 根據此次抽樣所得之95%信賴區間為 $[0.52, 0.58]$
 - (2) 由此調查報告顯示，此次調查所得之信賴區間有95%的機率包含真正贊成基測由兩次改為一次的學生家長比例
 - (3) 若想減少抽樣誤差，可以增加抽樣訪問民眾的人數，且信賴區間寬度亦隨之縮小
 - (4) 承(3)，在同樣的條件下，降低信心水準，抽樣誤差會提高
 - (5) 若重複作100次的抽樣，所分別得到的100個信賴區間中，大約有95個包含真正贊成基測由兩次改為一次的學生家長比例

2. 袋中有3顆白球，7顆紅球，
 從袋中每次取出一球，每球被取到的機率均等，取後放回，連續取600次，並作記錄，結果取到紅球的次數為360次，下列選項何者正確？
 (說明如下)：對母群體取到紅球機率 p 在90%信心水準的信賴區間為

$$\left[\hat{p} - 1.65 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 1.65 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

母群體取到紅球機率 p 在95%信心水準的信賴區間為

$$\left[\hat{p} - 2 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

- (1) 在此試驗下，紅球被取到的機率為0.6
- (2) 在90%信心水準下，所作的信賴區間為 $[0.567, 0.633]$

- (3) 在 90% 信心水準下，所作的信賴區間，可以涵蓋母群體真正的 p 值
- (4) 在 90% 信心水準下，以同樣的方法將取球次數提高到 800 次，且取到紅球的次數為 480 次，則試驗誤差較小
- (5) 若取球次數相同，取到紅球的次數也相同，以較高的信心水準作結論，則試驗誤差較小

3. 某電視台想要瞭解全台灣觀眾對「偶像劇是否應該拍攝續集」的意見做抽樣調查，依學生、上班族、家庭主婦區分，所得結果如右：請問：從此次抽樣結果，可以得到下列推論何者正確？

	學生	上班族	家庭主婦
贊成拍攝續集的比例 \hat{p}	0.56	0.72	0.86
\hat{p} 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	0.02	0.04	0.02

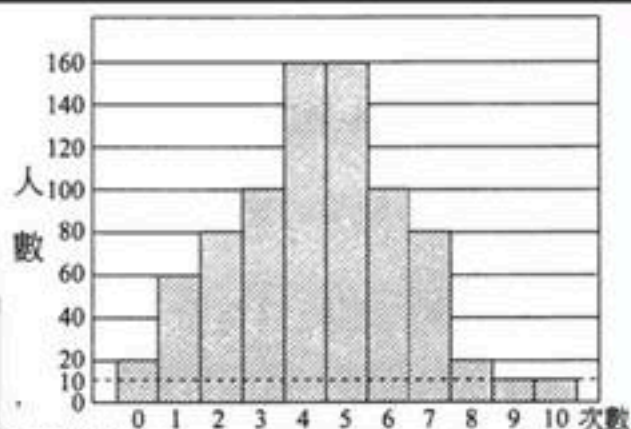
- (1) 全台灣觀眾中，家庭主婦贊成拍攝續集的比例大於上班族贊成拍攝續集的比例
- (2) 此次抽樣的學生人數多於上班族的人數
- (3) 在 95% 信心水準下，上班族贊成拍攝續集的比例之信賴區間為 $[0.68, 0.76]$
- (4) 若提高學生的調查人數，則可以增加學生贊成拍攝續集的比例
- (5) 在同樣條件下，降低信心水準，信賴區間也會變小

4. 某民意機構調查臺北市的市民對某議題的支持度，依性別區分，所得結果如下：在 95% 信心水準之下，該議題在男性與女性的支持度之信賴區間分別為 $[0.76, 0.84]$ 、 $[0.4, 0.6]$ 。若不區分性別，95% 信心水準下的信賴區間為_____。
(計算至小數點後第二位，第三位四捨五入) (已知 $\sqrt{96.2} \approx 9.8$)

5. 某知名車廠委任甲、乙、丙三家民調機構，調查北部居民對該汽車品牌的知名度 (即當地居民聽過該汽車品牌所占之百分比)，基於尊重民調專業，三家機構可自訂調查人數，也可各自選定信心水準，經過調查後，甲、乙、丙三家民調機構算出該汽車品牌知名度之信賴區間分別為 $[0.42, 0.48]$ 、 $[0.43, 0.47]$ 、 $[0.48, 0.52]$ 。請選出正確的選項：
- (1) 丙民調機構調查出該汽車品牌知名度比甲民調機構高
- (2) 甲民調機構的抽樣誤差最小
- (3) 若信心水準相同，則甲機構調查居民人數比乙機構少
- (4) 若信心水準相同，則丙機構調查居民人數比乙機構多
- (5) 若調查居民人數相同，則甲機構的信心水準比乙機構低。

6. 若希望在 95% 信心水準下抽樣誤差不超過 3.5%，則在這次調查中，至少需訪問幾個人？
(1) 812 人 (2) 817 人 (3) 822 人 (4) 827 人 (5) 832 人

7. 某市各中等學校每學年的高一學生，皆以罰球線投籃 10 次的命中次數做為第一學期體育的期末考成績，實施多年後，所得的統計資料分析：「命中 k 次的人數與總人數之比值」恰與二項分配「重複試驗 10 次，每次成功之機率為 $\frac{2}{5}$ 」中成功 k 次的機率相同。



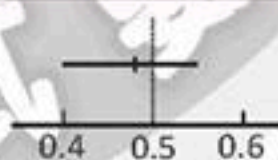
今某高中一年級學生 800 人，每個同學投籃 10 次，其命中次數與人數統計圖如右。則下列選項哪些是正確的？

- (1) 若在該高中一年級學生中隨機選取 1 人，其投籃命中次數超過 6 次之機率為 $\frac{3}{10}$
- (2) 由二項分配知，投籃命中次數的期望值為 4 次
- (3) 由二項分配知，投籃命中次數的標準差為 $\frac{\sqrt{15}}{5}$
- (4) 該高中一年級學生，其投籃命中次數在「二項分配平均數正負兩個標準差之間」所占的人數百分比為 92.5%
- (5) 今在該高中一年級學生中隨機選取 25 位學生，每個學生投一球，結果有 9 人投中，在 95% 的信心水準下，該高中一年級學生投籃命中率的信賴區間為 $[0.18, 0.54]$

8. 為探討小學生睡眠時間與身高的關係，由全國小學生中隨機抽樣 400 位，令 y 代表小學生的身高， x 代表每位小學生平均每天的睡眠時間，則 $w = 7(24 - x)$ 代表每位小學生平均每週除睡眠以外的時間，今甲、乙兩生分別作 y 對 x 、 y 對 w 的散佈圖，試問下列選項哪些是正確的？

- (1) w 、 y 的相關係數與 x 、 y 的相關係數必相等
- (2) 甲乙兩生分別由散佈圖中以 x 、 w 預測身高 y ，且以最小平方方法所作出的 y 對 x 與 y 對 w 的迴歸直線斜率分別為 m 和 m' ，則 $m' = 7m$
- (3) 已知抽樣 400 人中早睡早起者有 80 人，則在 95% 信心水準下，全國小學生早睡早起所佔比率的信賴區間為 $[0.16, 0.24]$
- (4) 同上，依常態分佈規則，今再隨機抽樣 400 人，若早睡早起者所佔的比率為 \hat{p} ，則 $\hat{p} \geq 0.22$ 的機率為 0.16

9. 如右圖為小林丟擲一個硬幣 50 次，在 68% 信心水準下正面比率的信賴區間圖形，依此次實驗，小林可以用下列哪一個選項的圖形表示在 95% 信心水準下正面比率的信賴區間圖形？



- (1)
- (2)
- (3)
- (4)

- (5) 條件不足，無法判斷