

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 60 天 : 三角函數圖形平移與伸縮

觀念篇

- (1) 已知 $y = f(x)$ 為週期函數，其週期為 p ，值域為 L
- (2) 三角函數的週期：
- (i) $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\sec x$ 、 $\csc x$ 的週期為 2π
 - (ii) $\tan x$ 、 $\cot x$ 的週期為 π
 - (iii) $|\sin x|$ 、 $|\cos x|$ 、 $|\tan x|$ 、 $|\cot x|$ 、 $|\sec x|$ 、 $|\csc x|$ 的週期為 π

例題篇：鑑往之傾向

1. 考慮函數 $f(x) = 2\sin 3x$ ，試問下列選項何者為真？

- (A) $-2 \leq f(x) \leq 2$
- (B) $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 時有最大值
- (C) $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$
- (D) $y = f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = \frac{\pi}{2}$
- (E) $f(2) > 0$ 。

【88 日社，8 分】

答：(A)(B)(C)(D)

例題篇：知來之對策

1. 設函數 $f(x) = -5\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ ，則下列選項何者為真？

- (1) $-5 \leq f(x) \leq 5$
- (2) $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 時有最小值
- (3) $f(x)$ 的週期為 $\frac{2\pi}{3}$
- (4) $y = f(x)$ 的圖形對稱於 x 軸
- (5) $f\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ 。

2. 已知 $a > 0$ ，函數 $f(x) = -2a\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2a + b$ ，

當 $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ 時， $-5 \leq f(x) \leq 1$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

3. 函數 $f(x) = a\sin(bx - c) + d$ ，其中 $a > 0, b > 0, \frac{\pi}{2} < c < \pi$ ，

若 $f(x)$ 的最大值是 4，最小值是 0，最小正週期為 $\frac{\pi}{2}$ ，

且直線 $x = \frac{\pi}{3}$ 為圖形的對稱軸，試求 $(a, b, c, d) =$ _____。

4. 當我們說「將函數圖形向 y 軸伸縮 k 倍」，

是指在座標平面上將函數 $y = f(x)$ 圖形上的每一組解 (x_0, y_0) 移動到 (kx_0, y_0) ，所得的新軌跡圖形。

(1) 假使將函數 $y = 2 \tan x$ 的圖形，先向 y 軸伸縮 3 倍，再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ ，

試求代表新圖型的函數_____。

(2) 承(1)，請寫出新圖形函數的「自變數取值的範圍」_____。

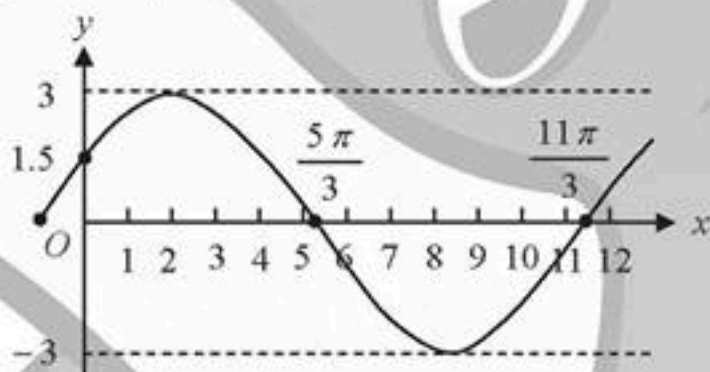
5. 如下圖一所示，一鉛直懸掛的輕彈簧(彈力常數 k 為 2)，其上端繫在天花板上，下端繫一質量為 m 公斤的物體。靜止之後，將物體往下拉 3 公尺(在彈性範圍內)，放手之後，則物體將作上下回復的週期振動，若不計摩擦力，根據物理原理，此物體的振動週期為

$2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ，若以平衡位置為原點，向上為正，向下為負，設 t 秒時物體的位移為 y 公尺，

而 y 可用正弦函數 $y = A \sin(\omega t + \alpha)$ ，其中 A, α 為正數來表示，其圖形如下圖二所示，試求 $(m, A, \omega, \alpha) =$ _____。



圖一



圖二