

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 56 天 : 複數幾何

### 觀念篇

複數平面：

(1) 將複數  $z = a + bi$ ， $a, b \in R$  與坐標平面上點  $P(a, b)$  互相對應

定義  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，幾何意義為點  $P(a, b)$  到原點的距離

(2) 複數絕對值的性質：

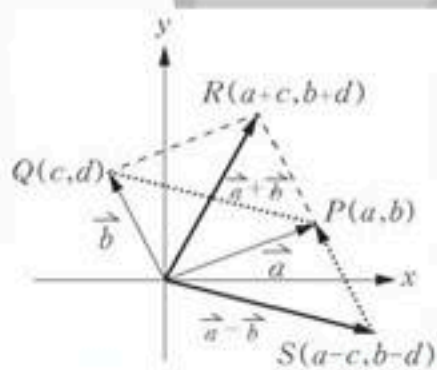
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$z_k = a_k + b_k i \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$$

$$|z_1^n| = |z_1|^n, \left| \frac{z_1^p \cdot z_2^q}{z_3^r} \right| = \frac{|z_1|^p \cdot |z_2|^q}{|z_3|^r}, z_3 \neq 0$$

(3) 複數的加減法的幾何意義：

複數的加減法在複數平面上的幾何意義為向量的加減法。



### 例題篇：鑑往之傾向

1. 設一元二次整係數方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  有一根為  $4 + 3i$ 。若將此方程式的兩根與原點在複數平面上標出，則此三點所圍成的三角形面積為

- (1) 5      (2) 6      (3) 12      (4) 16      (5) 24      【95 學測】

答：3

2. 設  $O$ 、 $A$ 、 $B$  分別為複數平面上代表  $0$ 、 $1 + i$ 、以及  $1 - i$  的點。

請問下列哪些選項所對應的點落在  $\triangle OAB$  的內部？

- (1)  $\cos 60^\circ$       (2)  $\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ$       (3)  $\frac{4 - 3i}{5}$

- (4)  $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$       (5)  $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{25}$       【100 學測】

答：(1)(3)(5)

3. 設  $z$  為一複數，且  $\frac{z-2}{z+2} = i$  (其中  $i = \sqrt{-1}$  為虛數單位)。

試問  $z$  的絕對值  $|z|$  為下列哪一個選項？

- (1)  $\frac{1}{2}$    (2)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$    (3) 1   (4)  $\sqrt{2}$    (5) 2

【102 數甲】

答：(5)

4. 在所有滿足  $z - \bar{z} = -3i$  的複數  $z$  中 (其中  $\bar{z}$  為  $z$  的共軛複數， $i = \sqrt{-1}$ )，

$|\sqrt{7} + 8i - z|$  的最小值為 \_\_\_\_\_。(化成最簡分數)

【105 數甲】

答： $\frac{19}{2}$

5. 設  $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ，試問複數  $1 - z$  的絕對值為？

【96 數甲】

答： $2 \sin \frac{\pi}{7}$

6. 設複數平面上的相異四點  $z_1, z_2, z_3, z_4$  依序且依逆時針方向可連成一個正方形。

下列哪一個選項為  $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$  之值？

- (1)  $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$    (2)  $\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$   
(3)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$    (4)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$   
(5)  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

【104 數甲】

答：(4)

### 例題篇：知來之對策

1. 同時滿足  $z - \bar{z} = 8i$  (其中  $\bar{z}$  為  $z$  的共軛複數， $i = \sqrt{-1}$ ) 及  $|z - (3 + 5i)| = 1$  的複數  $z$ ，試問  $z$  的絕對值  $|z| =$  \_\_\_\_\_。

2. 已知複數平面上  $O$  為原點，三相異點  $A, B, C$  所對應之複數分別為  $z_1, z_2, z_3$ ，

且  $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$ ，請選出正確的選項：

(1) 若  $|z_1 + z_2 - z_3| = 1$ ，則  $2 \leq |z_3| \leq 4$    (2)  $z_1^6 - z_2^6 = 0$    (3)  $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = 0$

(4)  $|1 - z_1|^2 + |1 - z_2|^2$  的最小值為 2

(5) 若  $D$  點所對應之複數為  $2z_2 - z_1$ ，則  $\overline{OA} \perp \overline{OD}$ 。