俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 53 天：複數棣美弗定理

觀念篇

棣美弗定理：

若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

證：利用『數學歸納法』

(1) 當 $n=1$ 時， $\left.\begin{array}{l}左=r(\cos\theta+i\sin\theta)\\右=r(\cos\theta+i\sin\theta)\end{array}\right\}$ 原式成立

(2) 當 $n=k$ 時， $\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$ 成立

(3) 則 $n=k+1$，

$左=\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^{k+1}=\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^k\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]$

$=\left[r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\right]\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]$

$=r^{k+1}(\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta)=右$

故由數學歸納法原理得知，原式得證。

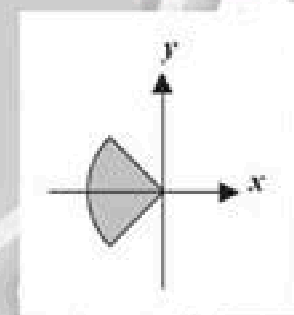
例題篇：鑑往之傾向

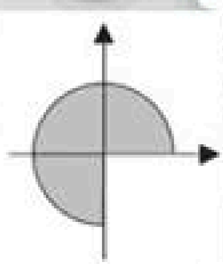
1. 右圖陰影部分所示為複數平面上區域

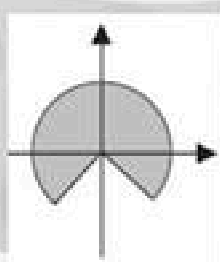
$A=\left\{z\,\middle|\,z=r(\cos\theta+i\sin\theta),0\le r\le 1,\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\right\}$

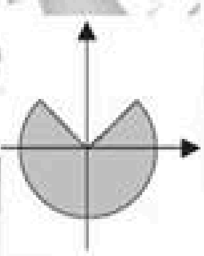
之略圖。令 $D=\left\{w\,\middle|\,w=z^3,z\in A\right\}$，試問下列選項中

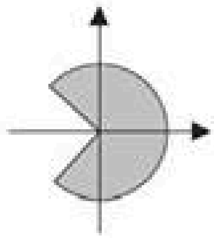
之略圖，何者之陰影部分與區域 D 最接近？

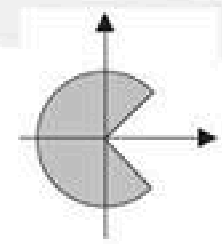


(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

(5) 

【93學測】

答：(5)

2. 已知複數z滿足$z^{n}+z^{-n}+2=0$，其中n為正整數。
將z用極式表示為$r(\cos\theta+i\sin\theta)$，且$r>0$。
試選出正確的選項。
(1)$r=1$ (2)n不能是偶數 (3)對給定的n，恰有$2n$個不同的複數z滿足題設
(4)θ可能是$\dfrac{3\pi}{7}$ (5)θ可能是$\dfrac{4\pi}{7}$ 【106 數甲】

答：(1)(4)

例題篇：知來之對策

1. 已知$f(n)=\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}i\right)^{n}$，其中$i=\sqrt{-1}$，若$f(n)$是正實數，
則自然數n最小值是_________。

2. 已知$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$，其中$i=\sqrt{-1}$，則下列敘述，選出正確的選項：
(1)α的主幅角為$\dfrac{5\pi}{12}$ (2)使α^{n}為實數的最小正整數n為12
(3)使α^{n}為純虛數的最小正整數n為12
(4)若$\alpha(\cos\theta+i\sin\theta)$為小於0的實數，則$\theta$為第二象限角
(5)若$\dfrac{\alpha}{\cos\theta+i\sin\theta}$為小於0的實數，則$\theta$為第二象限角。