俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

俞克斌老師編寫

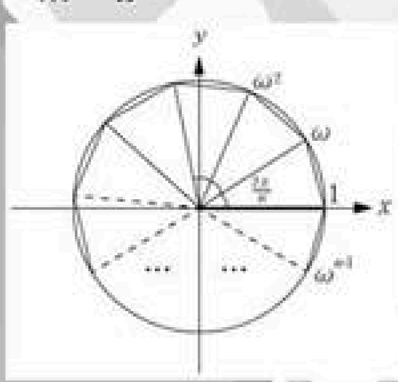
倒數 52 天：複數方根

觀念篇

1的n次方根：

方程式$z^n=1$的n個根為$z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$，$k=0$、$1$、$2$、…、$n-1$，$n\in N$。

令$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，則$z^n=1$的$n$個根可寫成$1$、$\omega$、$\omega^2$、…、$\omega^{n-1}$。



(1)$\omega^n=1$

(2)$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$

(3)$f(z)=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^2+z+1$
$\quad=(z-\omega)\left(z-\omega^2\right)\left(z-\omega^3\right)\cdots\left(z-\omega^{n-1}\right)$

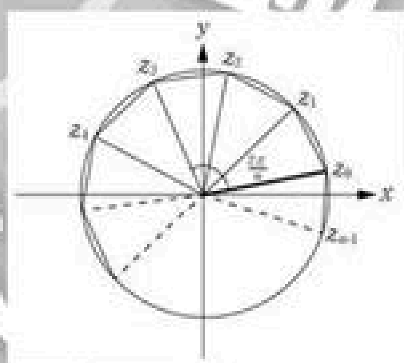
(4)1、ω、ω^2、…、ω^{n-1}為複數平面上，
以原點為圓心的單位圓上的n個等分點，
即n個根恰為單位圓上內接正n邊形的n個頂點。

複數a的n次方根（$z^n=a$之根）：
先將複數a表成極式的形式：

$z^n=a=|a|(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi))$

$\Rightarrow z=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$，$k=0$、$1$、$2$、…、$n-1$，$n\in N$。

即$z^n=a$的n個根恰為半徑$\sqrt[n]{|a|}$之圓上
內接正n邊形的n個頂點。



例題篇：鑑往之傾向

1. 試解出方程式$\left(z-\sqrt{3}\right)^6+64=0$的所有的根（複數根）。 【78 大學聯考】

答：$z=2\sqrt{3}\pm i$或$\sqrt{3}\pm 2i$或$\pm i$

2. 試解出方程式$x^6-x^3+1=0$的所有的根（複數根）。 【73 大學聯考】

答：$x=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{9}$，$k=0$、$2$、$3$、$5$、$6$、$8$

3. 設方程式$x^5=1$的五個根為1，ω，ω^2，ω^3，ω^4，
則$(3-\omega)\left(3-\omega^2\right)\left(3-\omega^3\right)\left(3-\omega^4\right)=$______。【93數甲】

答：121

4. 令Z為複數且$Z^6=1$，$Z\neq 1$，則下列選項何者為真？
(1) $|Z|=1$ (2) $\left|Z^4\right|=1$ (3) $Z^2=1$ (4) $Z^3=1$或-1
(5) $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4+Z^5=0$ 【90學測】

答：(1)(2)(4)(5)

例題篇：知來之對策

1. 將複數$z^{12}=-32+32\sqrt{3}i$的解依主輻角大小，
由小到大排列依序為z_1，z_2，……，z_{12}，求：
(1)請以極式表示z_k，$k=1$，2，……，12。
(2)由z_3、z_5、z_8、z_{12}所圍成的四邊形面積。

2. (1)令$\omega=\cos\theta+i\sin\theta$，其中$i=\sqrt{-1}$，$\theta\neq n\pi$，$n$為整數，
請證明：$\dfrac{2i}{\omega^2-1}=\cot\theta-i$。
(2)設ω滿足上面(1)的假設，若$z=\dfrac{2i}{\omega^2-1}$，請證明$\left|\dfrac{z+2i}{z}\right|=1$。
(3)設z滿足上面(2)的假設，且又滿足$(z+2i)^6=z^6$，請求出所有可能z的值。
（以$a+bi$表示，其中a、b為實數）