俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 51 天 ： 旋轉矩陣

觀念篇

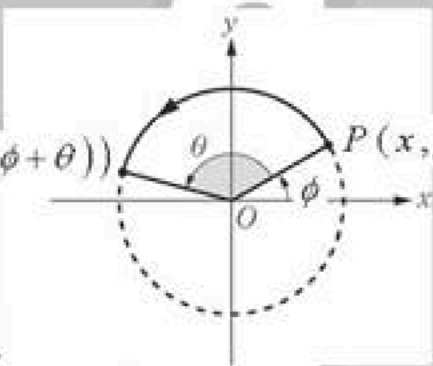
將(x,y)以原點為中心旋轉θ角得(x',y')，則$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

證：$(x',y')=(r(\cos\phi\cos\theta-\sin\phi\sin\theta),r(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi))$

$=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$P'(x',y')=(r\cos(\phi+\theta),r\sin(\phi+\theta))$



$P(x,y)=(r\cos\phi,r\sin\phi)$

例題篇：鑑往之傾向

1. 若矩陣$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，

則$A^2=$______。若$A^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，且$0°<\theta<180°$，則$\theta=$______。

【83學測】

答：$A^2=\begin{bmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{bmatrix}$；$\theta=90°$

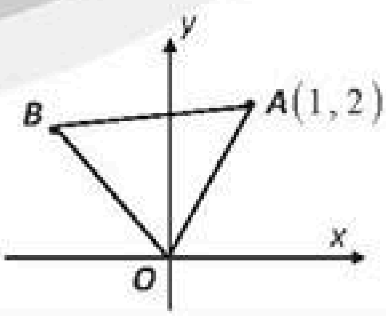
2. 如圖所示在坐標平面上，ΔOAB為一正三角形，其中點A的坐標為$(1,2)$，點B為(b_1,b_2)。試問下列何者為真？

(1) $(b_1,b_2)=(-1,2)$

(2) $\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos60° & -\sin60°\\ \sin60° & \cos60°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos60° & \sin60°\\ \sin60° & -\cos60°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

【92日社】



答：(2)

3. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。令 $a=\overline{OP_1}$。

(1)試求 $\sin\left(\angle P_1OP_3\right)$。(4 分)

(2)試以 a 表示 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積。(4 分)

(3)假設 P_1 是圖形 $y=\frac{1}{10}x^2-10$ 上的動點，試求 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值。(4 分)

【106 數甲】

答：(1) $\frac{24}{25}$ (2) $\frac{3a^2}{25}$ (3) 9

4. 設 A 為坐標平面上代表旋轉某個角度的二階方陣，且已知 $A^6=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。試問 A 可能是以下哪些選項中的方陣？

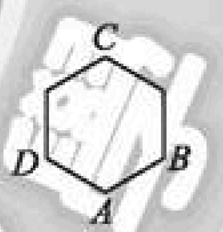
(1) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}\cos 300^\circ & -\sin 300^\circ\\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}\cos 150^\circ & \sin 150^\circ\\ -\sin 150^\circ & \cos 150^\circ\end{bmatrix}$ 【97 數甲】

答：(1)(3)(5)

例題篇：知來之對策

1. 如圖，正六邊形中頂點 $A(1,2)$、$B(5,4)$、$C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，試求 $x_1+y_2=$______。



2. 設 $0<\theta<\pi$，若 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-15\\ 20\end{bmatrix}$，關於 θ 值，請選出正確的選項：

(1) $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$ (3) $\frac{2\pi}{3}<\theta<\frac{3\pi}{4}$ (4) $\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{6}$

(5) $\frac{5\pi}{6}<\theta<\pi$。

3. 設二階方陣 M 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 $A(1,0)$ 映射到 $B(-\sin\theta,\cos\theta)$ 且將 $C(0,1)$ 映射到 $D(-\cos\theta,-\sin\theta)$，其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$。請選出正確的選項。

(1) M 定義的線性變換是鏡射變換 (2) M 定義的線性變換是旋轉變換

(3)$M=\begin{bmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ (4)M 的行列式值為-1

(5)$M^2=\begin{bmatrix}-\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$。

4. 設矩陣$A=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{10} & -\sin\frac{\pi}{10} \\ \sin\frac{\pi}{10} & \cos\frac{\pi}{10}\end{bmatrix}$，則$\sum_{n=1}^{519}A^n=$

(1) $\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}0 & -1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}$

5. 設$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，且$A^3+A^6+A^9+\cdots\cdots+A^{30}=\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}$，

則$a+b+c+d=$________。

6. 設$A=\begin{bmatrix}-1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$，則$A+A^4+A^7+\cdots\cdots+A^{3k-2}+\cdots\cdots+A^{100}=aA$，

其中a為實數，$k=1$，2，3，……，34，則a的值為何？

(1)$\frac{1-8^{34}}{9}$ (2)$\frac{1-8^{34}}{-7}$ (3)$\frac{1+8^{33}}{9}$ (4)$\frac{1-8^{33}}{9}$ (5)$\frac{1-8^{33}}{-7}$。

7. 設$A(1,0)$、$B(0,1)$為坐標平面上兩點，經過二階方陣M所定義的線性變換後，A變換為$A'\left(-1,\sqrt{3}\right)$，$B$變換為$B'\left(-\sqrt{3},-1\right)$，請選出正確的選項：

(1)$M=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$ (2)點$(1,1)$變換後落在第三象限

(3)設C為x軸上一點，且C經過該線性變換6次後變換為C'，則C'必落在x軸上

(4)設O為坐標平面的原點，點D變換為點D'，若$\overline{OD}=2$，則$\overline{DD'}>5$

(5)設P為半徑為1的圓上異於A、B的一點，且P變換為點P'，則$\Delta A'B'P'$的面積必不大於4。