

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

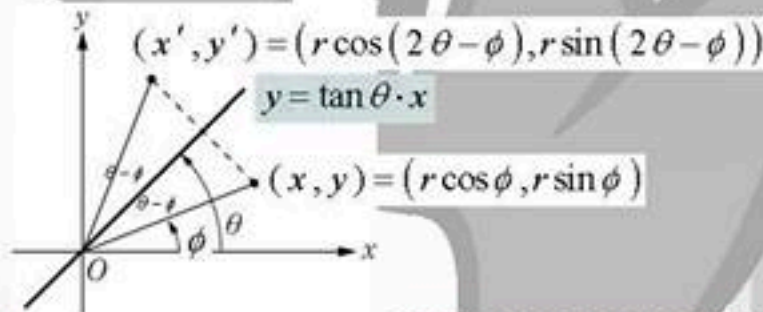
## 倒數 50 天 : 鏡射矩陣

### 觀念篇

將  $(x, y)$  以  $y = \tan \theta \cdot x$  為鏡射軸，對應到  $(x', y')$ ，則 
$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

解：  $(x', y') = (r(\cos 2\theta \cos \phi + \sin 2\theta \sin \phi), r(\sin 2\theta \cos \phi - \cos 2\theta \sin \phi))$   
 $= (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta, x \sin 2\theta - y \cos 2\theta)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



### 例題篇：鑑往之傾向

1.  $A$  和  $B$  是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元素都是實數。就二階方陣所對應的平面變換來說， $A$  在平面上的作用是對直線  $L: y + \sqrt{3}x = 0$  的鏡射，且知  $AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。請選出正確的選項。

- (1)  $B$  所對應的平面變換是旋轉 (2)  $-A$  是  $B$  的(乘法)反方陣  
 (3)  $A + B = 0$  (4)  $AB = BA$  【92數甲】

答：(2)(3)(4)

2. 有關矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  與矩陣  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1)  $AB = BA$  (2)  $A^2 B = BA^2$  (3)  $A^{11} B^3 = B^6 A^5$   
 (4)  $AB^{12} = A^7$  (5)  $(ABA)^{15} = AB^{15} A$  【96數甲】

答：(2)(4)(5)

### 例題篇：知來之對策

1. 若二階方陣  $M$  所代表的線性變換可以將平面上的直線  $L: x - \sqrt{3}y = 0$  上的點變換到  $L_1: \sqrt{3}x - y = 0$  上，則下列哪些選項是正確的？

(1)  $M$  定義的線性變換可以是旋轉變換 (2)  $M$  定義的線性變換可以是鏡射變換

(3)  $M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$  (4)  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (5)  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 。

2.  $A$ 、 $B$  為兩個二階方陣，方陣中每一個位置的元素皆為實數，就二階方陣所對應的平面變換來說， $A$  在平面上的作用是對直線  $L: y = 2x$  的鏡射，且知  $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，則下列選項中哪些正確？

(1)  $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$  (2)  $A^{-1} = A$  (3)  $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

(4)  $B$  所對應的平面變換為旋轉

(5) 點  $P(4, 3)$  對直線  $L$  鏡射後的對應點  $P'$  坐標為  $(0, 5)$ 。

3. (1) 求以直線  $L: x - 2y = 0$  為鏡射軸的鏡射矩陣。

(2) 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  皆為實數，若  $a$ 、 $b$  滿足  $|a| + |b - 2| = 3$ ，

且  $c$ 、 $d$  滿足  $\begin{cases} 5c = 3a + 4b \\ 5d = 4a - 3b \end{cases}$ ，求  $(a - c)^2 + (b - d)^2$  的最大值。