俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 48 天：綜合矩陣

觀念篇

例題篇：鑑往之傾向

1. 坐標平面上有 A、B、C 三點，滿足 $\angle ABC$ 為直角，$\overline{AB}=\overline{BC}$，且向量 $\overrightarrow{AB}=(4,2)$。請選出可以為向量 $\overrightarrow{AC}$ 的選項。
(1) $(-2,4)$ (2) $(2,-4)$ (3) $(2,6)$ (4) $(-2,6)$ (5) $(6,-2)$ 【104 數甲】

答：(3)(5)

2. 座標平面上一矩形，其頂點分別為 $A(3,-2)$、$B(3,2)$、$C(-3,2)$、$D(-3,-2)$。設二階方陣 M 為在座標平面上定義的線性變換，可將 A 映射到 B 且將 B 映射到 C。請選出正確的選項。
(1) M 定義的線性變換是鏡射變換
(2) $M\begin{bmatrix}3 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$
(3) M 定義的線性變換將 C 映射到 D 且將 D 映射到 A
(4) M 的行列式值為 -1
(5) $M^3=-M$ 【105 數甲】

答：(2)(3)(5)

3. 考慮坐標平面上的直線 $L:3x-2y=1$。若 a 為實數且二階方陣 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & -8\end{bmatrix}$ 所代表的線性變換可以將 L 上的點變換到一條斜率為 2 的直線。則 a 的值為下列哪一個選項？
(1) 6 (2) 8 (3) 10 (4) 12 (5) 14 【104 數甲】

答：(5)

4. 對於正整數 n，設 $(1+i)^n=a_n+ib_n$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 a_n、b_n 為實數。
(1) 試求 $a_4^{\ 2}+b_4^{\ 2}$ 之值。
(2) 從恆等式 $(1+i)^{n+1}=(1+i)^n(1+i)$ 可推得 a_n、b_n 會滿足矩陣乘法 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，試求矩陣 T。
(3) 令 P、Q 為座標平面上異於原點 O 的兩點，若矩陣 T 在平面上定義的線性變換將 P、Q

分別映射到點 P'、Q'，試證 $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$ 且 $\angle POQ=\angle P'OQ'$。 【103 數甲】

答：(1) 16　(2) $T=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

5. 設 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 為坐標平面上兩點，C 為直線 AB 外一點。
經平面線性變換 M 作用後，
A 被映射至 $A'(1,\sqrt{2})$，B 被映射至 $B'(-1,\sqrt{2})$，而 C 被映射至 C'。
(1) 試問變換 M 的矩陣為何?(4 分)
(2) 試證明變換 M 將 ΔABC 的重心映射至 $\Delta A'B'C'$ 的重心。(4 分)
(3) 若 ΔABC 的面積為 3，試求點 C' 與直線 $A'B'$ 的距離。(4 分) 【102 數甲】

答：(1) $M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$　(2) $6\sqrt{2}$

例題篇：知來之對策

1. 設 A 為二階方陣，在坐標平面上，當 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，則稱點 $P(x,y)$ 經由二階方陣 A 作線性變換對應到點 $P'(x',y')$。若 $A=\begin{bmatrix}r\cos\theta & -r\sin\theta\\ r\sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$，且 $r>1$，$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$，
則點 $P(3,3\sqrt{3})$ 經由二階方陣 A 作線性變換對應到的點可能為下列何者？
(1) $(0,7)$　(2) $(-2,2)$　(3) $(-5,7)$　(4) $(-3,0)$　(5) $(-4,-4\sqrt{3})$。

2. 在坐標平面上的點序列 (a_1,b_1)、(a_2,b_2)、(a_3,b_3)、……，對所有的 n 為正整數滿足 $(a_{n+1},b_{n+1})=(\sqrt{3}a_n-b_n,\sqrt{3}b_n+a_n)$。設二階方陣 M 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 (a_n,b_n) 映射至 (a_{n+1},b_{n+1})，則：
(1)試問線性變換矩陣 M 為何？
(2)試求矩陣 M 的反矩陣 M^{-1}。
(3)若 $(a_{100},b_{100})=(2^{107},2^{108})$，則 a_1+b_1 之值為何？

3. 設 $B=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 且 $A=aB+C$（a 為實數），若 A 表逆時針繞原點旋轉 θ 之旋轉矩陣，則下列選項哪些正確？
(1) $a=-\dfrac{2}{5}$　(2) $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$　(3) $\dfrac{\left(C^2+C^{-1}\right)^2}{4}$ 為一轉移矩陣　(4) AC^2 為一鏡射矩陣
(5) A^2C 為一旋轉矩陣。

4. 設$A(1,2)$、$B(-2,3)$為坐標平面上兩點，C為直線AB外一點，A、B、C三點經平面線性變換M矩陣作用後分別得$A'(-1,5)$、$B'(2,4)$、C'：
(1)試問線性變換M矩陣為何？
(2)若ΔABC的面積為5，試求點C'到直線$A'B'$的距離。

5. 平面上，兩相異直線方程式L_1：$2x+y=3$，L_2：$x+y=1$經由線性變換$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$，分別換成$L_1'$及$L_2'$。
(1)求L_1'的方程式。 (2)若L_1'和L_2'的夾角α，求$\sin\alpha=$？

6. 設二次曲線Γ：$4x^2+y^2-6y+5=0$，以矩陣$A=\begin{bmatrix}1 & a\\-a & 1\end{bmatrix}$對$\Gamma$作線性變換得$\Gamma'$，即$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，其中$a$為實數，$(x,y)\in\Gamma$，$(x',y')\in\Gamma'$，則：
(1)當Γ'與x軸相切時，$a=$________。
(2)承(1)，試求切點坐標________。