

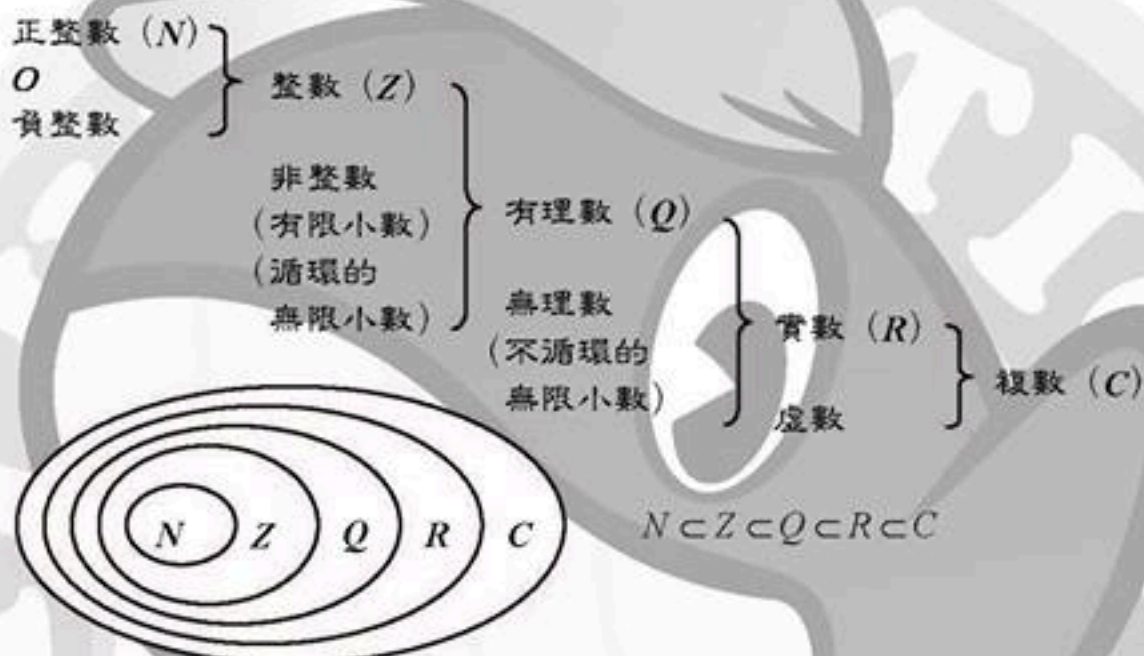
俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 46 天 : 有理數無理數

觀念篇

數系：



N Z	Q R	C
⊖ 四則運算 封閉性	⊕ 四則運算 封閉性	⊕ 四則運算 封閉性
分散性： $a, b \in Z$, 若 $a \neq b$ 則 $ a - b \geq 1$ 。	稠密性： $a, b \in Q$, 若 $a < b$, 則 $\exists c \in Q$, 會使 $a < c < b$ 。	

有理數：

凡型如 $\frac{q}{p}$, $p, q \in Z$, 且 $p \neq 0$, $(p, q) = 1$ 者, 稱為「有理數 (Q)」。

有理數 $\frac{q}{p}$ 可表為有限小數 $\Leftrightarrow p = 2^\alpha \cdot 5^\beta, \alpha, \beta \in N \cup \{0\}$
 可表為純循環小數 $\Leftrightarrow p$ 只有 2, 5 外之質因數
 可表為混循環小數 $\Leftrightarrow p$ 有 2 或 5 之因數且有其他質因數

有理數對於「加、減、乘、除」具有「封閉性」。

雙重根號拆解：

$a, b \in Q, a > b > 0$, 則 $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

有理數、無理數互斥性：

已知 a, b, c, d 均為有理數, \sqrt{e} 為無理數,

若 $a + b\sqrt{e} = c + d\sqrt{e}$, 則 $a = c$ 且 $b = d$ 。

若 $a + b\sqrt{e} = 0$, 則 $a = 0$ 且 $b = 0$ 。

例題篇：鑑往之傾向

1. 考慮有理數 $\frac{n}{m}$ ，其中 m 、 n 為正整數且 $1 \leq mn \leq 8$ 。

則這樣的數值（例如 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{4}$ 同值，只算一個）共有幾個？

- (1) 14 個 (2) 15 個 (3) 16 個 (4) 17 個 (5) 18 個

【105 數乙】

答：(4)

2. 下列有關循環小數的敘述中，請選出正確的選項。

- (1) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = 0.\overline{6} + 0.\overline{4}$ (2) $0.\overline{72} + 0.\overline{28} = 1.\overline{1}$ (3) $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = 1$
(4) $0.\overline{5} + 0.\overline{5} = 1.\overline{1}$ (5) $0.\overline{49} = 0.5$

【102 數乙】

答：(1)(4)(5)

3. 試選出正確的選項：

- (A) $0.\overline{343}$ 不是有理數 (B) $0.\overline{34} > \frac{1}{3}$ (C) $0.\overline{34} > 0.343$ (D) $0.\overline{34} < 0.35$
(E) $0.\overline{34} = 0.3\overline{43}$ 【103 學測】

答：(B)(C)(D)(E)

4. 試問下列哪些選項中的數是有理數？

- (1) 3.1416 (2) $\sqrt{3}$ (3) $\log_{10} \sqrt{5} + \log_{10} \sqrt{2}$ (4) $\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$
(5) 方程式 $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ 的唯一實根 【98 學測】

答：(1)(3)(4)

5. 設 r 、 s 為整數，已知整係數多項式 $x^3 + rx + s$ 的因式分解是

$x^3 + rx + s = (x+a)^2(x+b)$ ，其中 a 、 b 為相異實數，求證 a 、 b 都是有理數。

【96 數乙】

證：

6. $\sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2}} + 1$ 等於下列哪一個選項？

- (1) 1.01 (2) 1.05 (3) 1.1 (4) 1.15 (5) 1.21

【101 學測】

答：(2)

7. 設 $a = \sqrt{7 + \sqrt{47}}$ ，則 a 在那兩個連續整數之間？

- (A) 0 與 1 之間 (B) 1 與 2 之間 (C) 2 與 3 之間 (D) 3 與 4 之間 (E) 4 與 5 之間。

【83 學測】

答：(D)

8. 設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則 $k =$ _____。【102 學測】

答：16

9. 證明 $\sqrt{25} + \sqrt{3}$ 為無理數。

【73 日社】

證：

10. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13} > 3.5$

(2) $\sqrt{13} < 3.6$

(3) $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$

(4) $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$

(5) $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$

【103 學測】

答：(1)(4)

例題篇：知來之對策

1. 有一最簡分數，其分子與分母之和為 20，將其化成小數後，第三位四捨五入得 0.54，則此分數為_____。

2. 已知有一個分子與分母的差為 4 的最簡分數，將其化為小數。此小數在小數點第 2 位四捨五入後的值為 0.4，則此最簡分數為_____。

3. 設 n 為整數，則使得 $\sqrt{102 - \sqrt{n}}$ 為有理數的 n 共有多少個？
(1) 9 (2) 10 (3) 11 (4) 12 (5) 13。

4. 將分數 $\frac{1234}{4995}$ 化成小數，則小數點後第 99 位數字為：
(1) 0 (2) 2 (3) 4 (4) 7 (5) 8。

5. 已知 $a+b$ 、 $b+c$ 、 $c+a$ 都是有理數，下列選項何者正確？
(1) a 、 b 、 c 都是有理數
(2) a 、 b 、 c 僅有 2 個是有理數
(3) a 、 b 、 c 僅有 1 個是有理數
(4) a 、 b 、 c 可能都不是有理數
(5) a 、 b 、 c 不能確定是有理數。

6. 已知 $n \in \mathbb{N}$ ，且滿足 $\frac{n}{11} < \sqrt{7} < \frac{n+1}{11}$ ，則 $n =$ _____。

7. 若 $a = \sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{6} + \sqrt{11}$ ， $c = \sqrt{3} \times \sqrt{11}$ ，則 a 、 b 、 c 的大小滿足下列哪一個選項？
(1) $a < b < c$ (2) $a < c < b$ (3) $b < c < a$ (4) $b < a < c$ (5) $c < a < b$

8. 下列各選項所表數字何者為無理數？

- (1) $0.\overline{23}$ (2) 無窮等比級數 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ 之和 (3) $2^{1.4}$
(4) $\log_8 \sqrt{2}$ (5) $\cos \frac{\pi}{3}$ 。

9. 設 m 為 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-0.25}$ 的小數部分，則 $\sqrt{m^3 + \frac{1}{m^3}} + 27$ 最接近下列哪一個整數？

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 8。

10. 實數數線上 $A\left(\sqrt{46-6\sqrt{5}}\right)$ 、 $B\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)$ ，

已知 P 點在線段 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$ ，求 P 點座標 = _____。

- (1) $\sqrt{5}+1$ (2) $\sqrt{5}-1$ (3) $2\sqrt{5}$ (4) 2 (5) $\frac{2\sqrt{5}-1}{4}$

11. 將 $\log_4\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$ 的值化為最簡分數 = _____。

12. 已知 $a = \frac{\sqrt{4+\sqrt{12}}}{2}$ 、 $b = \frac{\sqrt{7+\sqrt{48}}}{3}$ 、 $c = \frac{\sqrt{21+\sqrt{432}}}{5}$ 。

則 a 、 b 、 c 的大小關係為何？

- (1) $a > b > c$ (2) $a > c > b$ (3) $c > a > b$ (4) $c > b > a$ (5) $b > c > a$ 。

13. 若 $\left(\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^3 - \left(\sqrt{10-\sqrt{19}}\right)^3 = a\sqrt{2} + b$ ，其中 a 、 b 為有理數，求 $a+b =$

- (1) 9 (2) 10 (3) 20 (4) 29 (5) 38。

14. 設 x 、 y 均為有理數，若 $x\sqrt{3-2\sqrt{2}} + y\sqrt{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{43-30\sqrt{2}}$ ，
則數對 $(x, y) =$ _____。

15. 設 a 、 b 為有理數，且 $27 \cdot 3^{a\sqrt{3-\sqrt{8}} + b\sqrt{8}} = 1$ 。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $a = -3$ (2) $b = -\frac{3}{2}$ (3) b 無解 (4) $a - 2b = 6$ (5) $2a + b = 0$

16. 若正實數 x 、 y 滿足 $1 < x < y$ ，則 $\sqrt{x+y-2\sqrt{xy+x-y-1}}$ 可化簡成下列哪一個選項？

- (1) $\sqrt{x-1} - \sqrt{y+1}$ (2) $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1}$ (3) $\sqrt{x+1} - \sqrt{y-1}$
(4) $\sqrt{y-1} - \sqrt{x+1}$ (5) $\sqrt{y+1} - \sqrt{x-1}$ 。