

高雄女中 107 年(106 學年度) 高一下第二次期中考數學試題

俞克斌老師編寫

一、是非題

1. 一個正11邊形有55條對角線。

【107 雄女】

答：×

解： $C_2^{11} - 11 = 44$

2. $C_{19}^{50} + C_{21}^{50} + C_{23}^{50} = C_{27}^{50} + C_{29}^{50} + C_{31}^{50}$ 。

【107 雄女】

答：○

解：互補性

3. $P_{50}^{100} < 10^{100}$ 。

【107 雄女】

答：○

解： $P_{50}^{100} = 100 \times 99 \times \dots \times 51 < 100 \times 100 \times \dots \times 100 = 100^{50}$

4. 一題有5個選項的多重選擇題，若至少有2個選項正確，則有27種可能的答案出現。

【107 雄女】

答：×

解： $C_5^5 + C_4^5 + C_3^5 + C_2^5 = 26$

5. $(x-y)^5$ 的展開式中 x^4y 項的係數與 xy^4 的係數相等。

【107 雄女】

答：×

解：同值異號

6. 將5封不同廣告單任意投入3個不同信箱，則有125種投法。

【107 雄女】

答：×

解： $3^5 = 243$

7. 滿足百位數字大於十位數字且十位數字大於個位數字的三位數有 C_3^{10} 個。

【107 雄女】

答：○

8. 將A、B、C、D、E五個字母排成一列，A不排第一位或B不排第二位的方法數有114種。

【107 雄女】

答：○

解：所求 = (全) - (A1且B2) = $5! - 3! = 114$

二、填充題

1. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人排成一列，若甲、乙、丙三人必排在此列的最前面三位，且丁、戊不相鄰，則此七人共有_____種排法。 【107 雄女】

答：72

解： $\underbrace{3!}_{\text{甲乙丙}} \times \underbrace{2! \times P_2^3}_{\text{丁戊插空隙}} = 6 \times 2 \times 6 = 72$

2. 試求 $\frac{P_3^5}{3!} + \frac{P_4^6}{4!} + \frac{P_5^7}{5!} + \dots + \frac{P_{k-2}^k}{(k-2)!} + \dots + \frac{P_{16}^{18}}{16!} + \frac{P_{17}^{19}}{17!}$ 之值為_____。 【107 雄女】

答：1130

解：所求 $= C_2^5 + C_2^6 + C_2^7 + \dots + C_2^{19}$
 $= C_3^5 + C_2^5 + C_2^6 + C_2^7 + \dots + C_2^{19} - C_3^5$
 $= C_3^{20} - C_3^5 = 1140 - 10 = 1130$

3. 將4枝相同的鉛筆，3枝不同的原子筆，分給9人，每人至多得一件，則有_____種分法。 【107 雄女】

答：7560

解： $\frac{9!}{4!1!1!1!2!} = 7560$

4. K女合作社擺放一台BT 21公仔扭蛋機，扭蛋機中的每個扭蛋內各放置有一隻造型公仔，已知造型公仔有8種不同款式且各個不同造型公仔的扭蛋皆有5顆。今阿米投幣扭出4顆扭蛋，將其全打開後，獲得的4隻公仔會有_____種不同的組合。 【107 雄女】

答：330

解：四 同： $C_1^8 = 8$
三同一異： $C_1^8 C_1^7 = 56$
二同二異： $C_1^8 C_2^7 = 168$
二同二同： $C_2^8 = 28$
四 異： $C_4^8 = 70$

5. $\left(2x - \frac{1}{4x}\right)^9$ 展開式中，合併同類項後，則 x^3 項的係數為_____。 【107 雄女】

答：-84

解： $C_6^9 (2x)^6 \left(-\frac{1}{4x}\right)^3 = 84 \times 64 \times \frac{-1}{64} x^3 = -84x^3$

6. 已知 $\sum_{k=1}^{11} C_k^{12} = C_1^{12} + C_2^{12} + C_3^{12} + \dots + C_{10}^{12} + C_{11}^{12} = a$ ，則 a 之值為_____。

【107 雄女】

答：4094

解：所求 $= 2^{12} - C_0^{12} - C_{12}^{12} = 4096 - 1 - 1 = 4094$

7. 甲社團想要甄選5位學妹在送舊晚會表演，若A、B、C、D、E、F六個班級各有2位學妹報名參加甄選，則最後甄選上的5個學妹中恰有2人同班，其餘3人不同班的結果有_____種。

【107 雄女】

答：480

解： $\left[C_1^6 C_2^2 \right] \left[C_3^5 C_1^2 C_1^2 C_1^2 \right] = 6 \times 80 = 480$

8. 利用七個數字0、0、0、1、1、2、3排成的七位數當中，滿足2必須在3左方出現（不一定要相鄰）的七位數共有_____個。

【107 雄女】

答：120

解： $\frac{7!}{3!2!2!} - \frac{6!}{2!2!2!} = 210 - 90 = 120$

9. 爸爸為了配合政府推行的「減塑政策」，於是自備了3個相同的環保袋出門買晚餐。若爸爸買了8個不同的便當要分裝到這3個相同的環保袋，且每個環保袋至少要裝2個便當，則有_____不同的分裝方式。

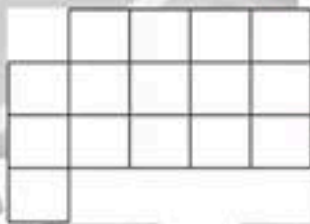
【107 雄女】

答：490

解： $(4, 2, 2) \Rightarrow C_4^8 C_2^4 C_2^2 \times \frac{1}{2!} = 210$

$(3, 3, 2) \Rightarrow C_3^8 C_3^5 C_2^2 \times \frac{1}{2!} = 280$

10. 已知兩組互相垂直的平行線段相交如右圖，則圖中共有_____個矩形。 【107 雄女】



答：78

解： $\underbrace{C_2^5 C_2^4}_{\text{上}} + \underbrace{C_2^6 C_2^3}_{\text{中}} + \underbrace{C_2^2 C_2^4}_{\text{下}} - \left(C_2^5 C_2^3 \right)_{\text{右重複}} - \left(C_2^2 C_2^3 \right)_{\text{左重複}}$
 $= 60 + 45 + 6 - (30) - (3) = 78$

11. 方程式 $5x^3 + y + z + u = 20$ 滿足 x 、 y 、 z 為正奇數且 u 為正整數的解有_____組。

【107 雄女】

答：28

解： $x=1$ 時， $y+z+u=15 \xrightarrow{\text{令}} y=2a+1, z=2b+1, u=2c+1$
 $\xrightarrow{a, b, c \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}} H_6^3 = C_6^8 = 28$

12. 試求出 11^{23} 除以 1000 的餘數為_____。

【107 雄女】

答：531

解： $(10+1)^{23} = C_0^{23} 10^{23} + \dots + C_{20}^{23} 10^3 + C_{21}^{23} 10^2 + C_{22}^{23} 10 + C_{23}^{23}$
必被 1000 整除 $25300+230+1=25531$
 $=25000+(531)$

13. 從「remember」一字的 8 個字母中，任意選取 4 個字母排成一列，共有_____種排法。

【107 雄女】

答：162

解：三同一異： $C_1^1 C_1^3 \times \frac{4!}{3!} = 12$

二同二異： $C_1^3 C_2^3 \times \frac{4!}{2!} = 108$

二同二同： $C_2^3 \times \frac{4!}{2!2!} = 18$

四異： $C_4^4 \times 4! = 24$

14. 摩斯密碼是由「•」與「—」兩種符號所排成一列的字串。若有一個摩斯密碼字串是由 3 個「•」符號及 8 個「—」符號所組成，且 3 個「•」符號不相鄰，則可產生_____種不同的摩斯密碼字串。

【107 雄女】

答：84

解： $H_{8-2}^4 = C_6^9 = 84$ (• — • — • — 再將 6 個—放入 4 位置)

15. 求 $1 + (1+2x^3) + (1+2x^3)^2 + (1+2x^3)^3 + \dots + (1+2x^3)^{11}$ 展開式中 x^6 項的係數為_____。

【107 雄女】

答：880

解：原式 = $\frac{1 - (1+2x^3)^{12}}{1 - (1+2x^3)}$ = $\frac{(1+2x^3)^{12} - 1}{2x^3}$ · 所求 = $\frac{C_3^{12} (2)^3}{2} = 880$

16. 八張刮刮卡中，有一、二、三獎各一張，其餘五張沒有得獎，將這八張刮刮卡平分給 4 人，每人各 2 張，此 4 人獲獎的情形共有_____種組合。(得不同獎項視為不同情況)

【107 雄女】

答：60

$$\text{解} : \underbrace{\left(C_1^4 C_2^3 \right)}_{\text{一人中兩獎}} \underbrace{\left(C_1^3 C_1^1 \right)}_{\text{一人中1獎}} + \underbrace{\left(C_3^4 \times 3! \right)}_{\text{三人各中1獎}} = 36 + 24 = 60$$

17. 某校從 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 七位教師中選派3名教師分別去3個不同的城市研習，每個城市一人，其中若 A 被選派則 B 、 C 兩人皆不被選派，若 D 被選派則 E 、 F 兩人皆不被選派，請問共有_____種選派方案。 【107 雄女】

答：102

解： $ADG \Rightarrow 3! = 6$

$$A (\text{無} D) \Rightarrow C_2^3 \times 3! = 18$$

$$(\text{無} A) D \Rightarrow C_2^3 \times 3! = 18$$

$$(\text{無} A) (\text{無} D) \Rightarrow C_3^5 \times 3! = 60$$