

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 45 天：算幾不等式

觀念篇

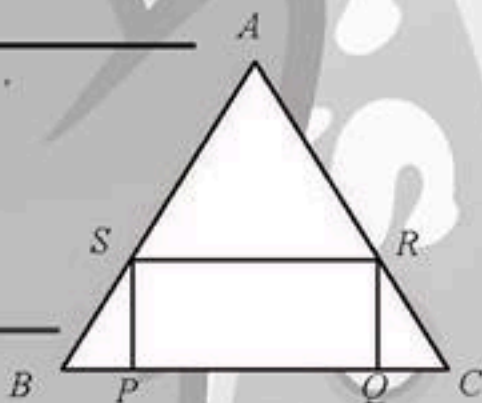
算幾不等式：

① a, b 為非負的實數，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，等號成立條件為 $a=b$

② 設 a_1, a_2, \dots, a_n 為 n 個非負實數，則 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$
而“=”成立於 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

例題篇：鑑往之傾向

1. 如圖所示， $PQRS$ 為一給定的矩形，長 $\overline{PQ} = 12$ 、寬 $\overline{QR} = 5$ ，而 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， P, Q 在 \overline{BC} 邊上， R, S 分別在 $\overline{CA}, \overline{AB}$ 邊上，則當 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的高為_____時， $\triangle ABC$ 的面積最小。【100 數甲】



答：10

例題篇：知來之對策

1. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\frac{3^{-8} + 3^{-4}}{2} > \frac{1}{9}$

(2) $\log_3 \frac{1}{2} > \log \frac{1}{3} \frac{1}{2}$

(3) $\frac{\log 3 + \log 5}{2} > \log \sqrt{15}$

(4) $\frac{\log \frac{1}{3} + \log \frac{1}{5}}{2} \geq \sqrt{\left(\log \frac{1}{3}\right)\left(\log \frac{1}{5}\right)}$

(5) $(\sqrt{101})^{-5} < (\sqrt{101})^{-4}$

2. 某交叉路口的「閃黃燈秒數」 $f(v)$ (秒) 應以 $\frac{v}{20} + \frac{80}{v} + 2$ 這公式規範較適宜，這裡的 v (公里/小時) 代表該路段的最高時速限制。問：將最高時速限制 v (公里/小時) 訂為_____時，這交叉路口的「閃黃燈秒數」會剛好是 6 秒。

3. 在數線的正向上有三點 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $P(6)$ ，已知 P 在線段 AB 之間且 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，請問 ab 的最大值為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{75}{2}$ (2) $\frac{6}{25}$ (3) $\frac{36}{25}$ (4) 30 (5) $\frac{25}{6}$ 。

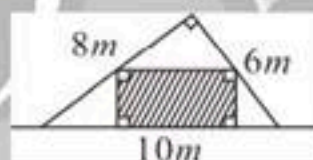
4. 已知直角三角形斜邊上的高其長度為 5，則直角三角形面積的最小值為_____。

5. 坐標平面上有兩定點 $O(0,0)$ 、 $P(4,2)$ ，

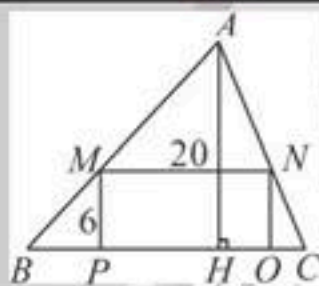
已知 A 是 x 軸正向上的點， B 是 y 軸正向上的點，且 $\overline{PA} \perp \overline{PB}$ ，求 ΔOAB 面積的最大值為_____。(化為最簡分數)

6. 平面上三條平行線依序為 L 、 M 、 N ，已知 L 和 M 的距離為 3， M 和 N 的距離為 1，今在 L 、 M 、 N 上各取一點 A 、 B 、 C ，滿足 $\angle ABC = 90^\circ$ ，求滿足條件的三角形 ABC 面積最小值為何？

7. 如圖，有一塊三邊長為 6、8、10 公尺的直角三角形形狀的空地，今欲在此空地中蓋房子，房子地基為矩形，且此房子地基的一邊是在三角形的斜邊上，則此地基的最大面積為_____平方公尺。



8. 如圖所示， ΔABC 中， \overline{AH} 為 \overline{BC} 邊上的高，已知一矩形 $MNOP$ ，其中 M 、 N 分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 邊上， P 、 Q 在 \overline{BC} 邊上， $\overline{MN} = 20$ 、 $\overline{MP} = 6$ ， H 在 \overline{PO} 上且滿足 $\overline{PH} : \overline{HO} = 3 : 1$ ，則 ΔABC 的最小面積為_____。



9. 一車主購買車輛時花費 60 萬元，每年的保險費汽油費共 6 萬元，而每年的維修費是一個公差為 1.2 萬元的等差數列，且第一年的維修費為 1.2 萬元。若該車主以「使用多少年的年平均費用最少」作為申請車輛報廢年限的依據，則該車的使用年限為_____年。

10. 已知 $a \geq b > 1$ ，求 $\log_b \left(\frac{b^5}{a} \right) + \log_a \left(\frac{a^4}{b} \right)$ 的最大值為_____。

11. 設 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $x + 2y = 3$ ，則下列敘述哪些是正確的？

- (1) 當 $(x, y) = (1, 1)$ 時， xy 有最大值 (2) 當 $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4} \right)$ 時， xy 有最大值
 (3) 當 $(x, y) = \left(2, \frac{1}{2} \right)$ 時， $2^x + 4^y$ 有最小值 (4) 承(3)， $2^x + 4^y$ 的最小值為 $4\sqrt{2}$

(5) 當 $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 時, $1 + \log_2 x + \log_2 y$ 有最大值

12. $f(x) = x^2 + 3x + k$ 的最小值為 -1 , $g(x) = 2x^2 + ax + 7$ 的最小值為 b .
其中 a 為變數且 $a \in \mathbb{R}$, 請選出正確的選項:

(1) $k = \frac{5}{4}$ (2) $f(x) + \frac{2}{f(x)}$ 的最小值 $= 2\sqrt{2}$

(3) 如果 $f(x) + g(x)$ 的最小值 $= -1 + b$, 則 $a = 6$

(4) 對任何 a , $f(x) \cdot g(x)$ 的最小值 $= -b$

(5) 對任何 a , $f(x) - g(x)$ 在實數上有最大值。

13. 設 $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, 試證 $C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n > n\sqrt{2^{n-1}}$ 。