

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 44 天：柯西不等式

### 觀念篇

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

等號成立於  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

等號成立於  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

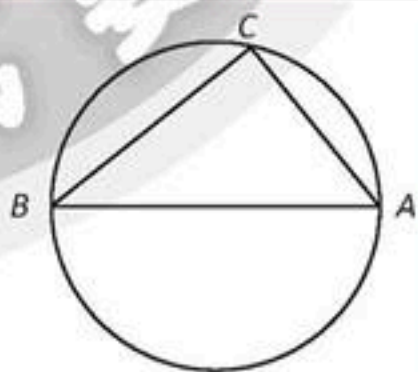
### 例題篇：鑑往之傾向

### 例題篇：知來之對策

1. 坐標平面上，若  $A(-2, 4)$ ， $O$  為原點，且點  $P(a, b)$  滿足  $(\vec{OA} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OP}) = 72$  若  $k = a + b$ ，則  $k$  的最大值為下列哪一個選項？  
(1) 12 (2) 14 (3) 20 (4) 36 (5) 48。

2. 設  $C_1: x^2 + y^2 = 16$ ， $C_2: x^2 + y^2 = 13$ ，  
若  $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$  兩點分別在  $C_1$ 、 $C_2$  的圖形上，  
則行列式  $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  的最大值為\_\_\_\_\_。

3. 阿信一家人假日到某遊樂園遊玩，此遊樂園為一半徑 5 公里之圓形，入口  $A$  點與出口  $B$  點恰好為一直徑的兩端點，若此遊樂園之景點皆在圓周上，阿信一家人因時間不夠之關係，僅能參觀一景點。若他們一開始以每小時 4 公里的速度由  $A$  點沿直線方向往某一景點  $C$  前進，後來因疲倦行進速度較慢，以每小時 3 公里的速度由  $C$  點沿直線方向往  $B$  點前進，那麼他們在遊樂園所花的時間可能為幾小時？



- (1)  $\frac{31}{6}$  (2)  $\frac{79}{12}$  (3)  $\frac{41}{6}$  (4)  $\frac{25}{6}$  (5)  $\frac{49}{12}$

4. 空間中三向量  $\vec{a} = (4, -3, 12)$ 、 $\vec{b} = (2, 3, -6)$ 、 $\vec{c}$ ，若  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 99$ ，  
則  $|\vec{b} \cdot \vec{c}|$  的最小值為\_\_\_\_\_。

5. 若  $x, y$  為實數，則  $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+14}}$  之最大值為  
(1)  $\sqrt{6}$  (2)  $\sqrt{5}$  (3) 2 (4)  $\sqrt{3}$  (5)  $\sqrt{2}$

7. 若  $\begin{cases} 3x-y-6 \leq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ ，且  $z = ax + by$  之最大值為 12，其中  $a > 0, b > 0$ ，  
則  $2a^2 + 3b^2$  的最小值為\_\_\_\_\_。

8. 已知  $a, b, c, d$  均為正數且  $a+b=3, cd=3$ ，則  $(ac+bd)(bc+ad)$  的最小值為？  
(1) 27 (2) 9 (3) 3 (4) 1 (5) 81。

9. 某校高一第一次期中考數學成績不太理想，只有少數同學及格；  
數學老師決定將每人的原始成績取平方根後再乘以 10 做為正式記錄的成績。  
已知某班未調整前的成績之算術平均數為 36 分，  
則下列分數何者可能是調整後之算術平均數？(取其整數部分)  
(1) 50 (2) 55 (3) 60 (4) 65 (5) 70