

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 43 天 : 實數與絕對值

觀念篇

絕對值與距離 :

(1) 距離 : $AB = |b - a|$

(2) $|x| \leq a \Leftrightarrow |x - 0| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Leftrightarrow |x - 0| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ or } x \leq -a$

(3) $a \leq x \leq b \Leftrightarrow a - \frac{b+a}{2} \leq x - \frac{b+a}{2} \leq b - \frac{b+a}{2}$

$\Leftrightarrow \left| x - \frac{b+a}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$

$x \leq a \text{ or } x \geq b \Leftrightarrow x - \frac{b+a}{2} \leq a - \frac{b+a}{2} \text{ or } x - \frac{b+a}{2} \geq b - \frac{b+a}{2}$

$\Leftrightarrow \left| x - \frac{b+a}{2} \right| \geq \frac{b-a}{2}$

三角不等式 :

$a, b \in R, \quad ||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

“=” 成立於 $ab \leq 0$

“=” 成立於 $ab \geq 0$

例題篇 : 鑑往之傾向

1. 數學兼哲學家伽利略於西元 1632 年出版《對話錄》一書觸怒教廷，然後在他 70 歲時，接受宗教法庭審判且於該年被判終身監禁，之後在獄中過世，享年 78 歲。出版《對話錄》一書到過世是伽利略人生最灰暗的 10 年。伽利略年輕時發明十倍率的望眼鏡，並餘次年發現木星的歐羅巴衛星，發明望眼鏡到出版《對話錄》算是伽利略人生的黃金歲月。這段期間之長剛好是他發現衛星時年紀的一半，根據上面的故事，請問下面有關伽利略生平的敘述，哪些是正確的？
- (A) 出生於西元 1566 年
 (B) 在 45 歲時發明 10 倍率的望眼鏡
 (C) 在西元 1610 年發現歐羅巴衛星
 (D) 在 68 歲時出版《對話錄》
 (E) 於西元 1644 年過世

【90 日社】

答 : (B)(C)(D)

2. 若實數 a, b, c 滿足 $abc > 0, ab + bc + ca < 0, a + b + c > 0, a > b > c$ ，則下列何者為真？

(1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$ (4) $|a| > |b|$ (5) $a^2 > c^2$ 【91 學測】

答：(1)(4)(5)

3. 設實數 a 、 b 滿足 $0 < a < 1$ ， $0 < b < 1$ ，則下列選項哪些必定為真？

(1) $0 < a + b < 2$ (2) $0 < ab < 1$ (3) $-1 < b - a < 0$ (4) $0 < \frac{a}{b} < 1$ (5) $|a - b| < 1$ 。

【91 學測 2】

答：(1)(2)(5)

4. 設一線段長為 a ，且知以 $2a$ 、 $2a + 3$ 、 $2a + 6$ 為三邊長可圍成鈍角三角形，則 a 的範圍為_____。

【80 日社】

答： $\frac{3}{2} < a < \frac{9}{2}$

5. 三個相異實數 a 、 b 、 c 滿足 $b = \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c$ ，如果將 a 、 b 、 c 標示在數線上，則

- (1) b 在 a 與 c 之間 (2) $c > b$
(3) 若 $d = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c$ ，則 d 在 a 與 b 之間 (4) a 到 c 的距離是 a 到 b 的距離的 5 倍
(5) 如果 $|b| = \frac{4}{5}|a| + \frac{1}{5}|c|$ ，則 $a \cdot b \cdot c > 0$

【103 數乙】

答：(1)(4)

6. 請問滿足絕對值不等式 $|4x - 12| \leq 2x$ 的實數 x 所形成的區間，其長度為下列哪一個選項？

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 6

【103 學測】

答：(4)

7. 下列各方程式中，請選出有實數解的選項。

- (1) $|x| + |x - 5| = 1$ (2) $|x| + |x - 5| = 6$ (3) $|x| - |x - 5| = 1$
(4) $|x| - |x - 5| = 6$ (5) $|x| - |x - 5| = -1$

【105 學測】

答：(2)(3)(5)

例題篇：知來之對策

1. 試求滿足不等式 $||x + 1.3| - 5| < 2$ 的整數 x 值共有_____個。

2. 滿足不等式 $10 \leq |x + 3| + |x - 6| \leq 14$ 之所有整數的個數有_____個。

3. 設 $m, k \in R$ ， $m > 0$ ，若 $m \leq |kx - 1| \leq 3$ 的解為 $-16 \leq x \leq -10$ 或 $2 \leq x \leq 8$ 。
則 $m + k =$ _____。

4. 若不等式 $|3x - b| \leq 4$ 的解集中整數只有 1、2、3 三個，
則下列選項中的 b 值哪些可以滿足上述條件？
(1) 3.5 (2) 4.5 (3) 5.5 (4) 6.5 (5) 7.5。

5. 若存在實數 x 使得 $|x| + |x - 1| = k$ ，則實數 k 的可能值為何？

(1) $\log_2 3$ (2) $2^{0.5}$ (3) $\sqrt{12 - 4\sqrt{8}}$ (4) $\tan 50^\circ$ (5) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ 。

