

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 42 天 : 二次函數

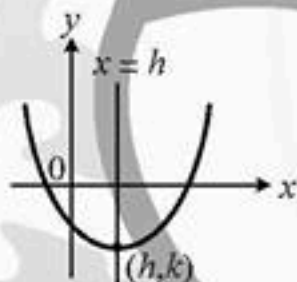
### 觀念篇

#### 二次函數及其圖形 :

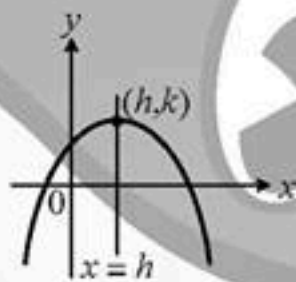
1.  $y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k$  ← 將  $y = ax^2$  之圖形平移  $(h, k)$  ,

$$\text{其中 } (h, k) = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

(1)  $a > 0$



(2)  $a < 0$



(i) 頂點  $\left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$  , 對稱軸  $x = -\frac{b}{2a}$  。

(ii)  $a > 0 \Leftrightarrow$  圖形朝上,  $a < 0 \Leftrightarrow$  圖形朝下。

(iii) 若  $b^2 - 4ac > 0$  , 圖形與  $x$  軸交於兩點 ;

若  $b^2 - 4ac = 0$  , 圖形與  $x$  軸交於一點 ;

若  $b^2 - 4ac < 0$  , 圖形與  $x$  軸沒有交點。

(iv) 圖形與  $y$  軸交於  $(0, c)$  。

#### 二次函數恆正, 恆負 :

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$  之恆正, 恆負 :  $D = b^2 - 4ac$

(1)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Leftrightarrow a > 0, D < 0$

(2)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \Leftrightarrow a > 0, D \leq 0$

(3)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0 \Leftrightarrow a < 0, D < 0$

(4)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0 \Leftrightarrow a < 0, D \leq 0$

### 例題篇 : 鑑往之傾向

1. 某製造玩具工廠, 每次接到訂單都需開模 5 萬元, 製造每一千個玩具材料費需 2 萬元, 由此建立生產的基本成本函數  $f(x) = 5 + 2x$ , 其中  $x$  以千個為單位。依過去經驗, 接到訂單數量與報價總值有如右關係 : 以此資料建立一個二次函數的報價總值函數  $g(x)$  ,

數量(千個)	報價總值(萬元)
5	37.5
10	70
15	97.5

以及獲利函數  $h(x) = g(x) - f(x)$ 。

- (1) 若接到訂單為 20 千個，試問交貨時，每千個玩具的基本成本平均是多少萬元？
- (2) 試求報價總值函數  $g(x)$ 。
- (3) 根據  $h(x)$ ，試問訂單數量是多少時，獲利總值最高？【98 數乙】

2. 設  $f(x)$  為二次實係數多項式，已知  $f(x)$  在  $x=2$  時有最小值 1 且  $f(3)=3$ 。

請問  $f(1)$  之值為下列哪一選項？

- (1) 5
- (2) 2
- (3) 3
- (4) 4
- (5) 條件不足，無法確定

【105 學測】

答：(3)

3. 設二次實係數多項式函數  $f(x) = ax^2 + 2ax + b$  在區間  $-1 \leq x \leq 1$  上的最大值為 7、最小值為 3，試求數對  $(a, b)$  的所有可能值。【101 數乙】

答：(1, 4) 或 (-1, 6)

4. 遞迴數列  $\{a_n\}$  滿足  $a_n = a_{n-1} + f(n-2)$ ，其中  $n \geq 2$  且  $f(x)$  為二次多項式。若  $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ， $a_3 = 5$ ， $a_4 = 12$ ，則  $a_5 =$  \_\_\_\_\_。【106 學測】

答：25

5. 考慮實數  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，其中  $a \neq 0$ 。令  $\Gamma$  為  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形。試選出正確的選項：

- (1) 若  $a > 0$ ，則  $\Gamma$  會通過第一象限
- (2) 若  $a < 0$ ，則  $\Gamma$  會通過第一象限
- (3) 若  $b^2 - 4ac > 0$ ，則  $\Gamma$  會通過第一象限
- (4) 若  $c > 0$ ，則  $\Gamma$  會通過第一象限
- (5) 若  $c < 0$ ，則  $\Gamma$  會通過第一象限。

【106 數乙】

答：(1)(4)

6. 假設  $a$ 、 $b$  皆為非零實數，且座標平面上二次函數  $y = ax^2 + bx$  與一次函數  $y = ax + b$  的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。

- (1) 在  $x$  軸上
- (2) 在  $y$  軸上
- (3) 在第一象限
- (4) 在第四象限
- (5) 當  $a > 0$  時，在第一象限；當  $a < 0$  時，在第四象限

【105 數甲】

答：(1)

7. 設  $a < b < c$ 。

已知實係數多項式函數  $y = f(x)$  的圖形為一開口向上的拋物線，且與  $x$  軸交於  $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$  兩點；

實係數多項式函數  $y = g(x)$  的圖形亦為一開口向上的拋物線，且跟  $x$  軸相交於  $(b, 0)$ 、 $(c, 0)$  兩點。

請選出  $y = f(x) + g(x)$  的圖形可能的選項。

- (1) 水平直線
- (2) 和  $x$  軸僅交於一點的直線
- (3) 和  $x$  軸無交點的拋物線
- (4) 和  $x$  軸僅交於一點的拋物線
- (5) 和  $x$  軸交於兩點的拋物線

【102 學測】



答：(4)(5)

8. 令  $A(-2,0)$ 、 $B(0,1)$ 、 $C(2,1)$ 、 $D(4,3)$  為坐標平面上四點。請選出正確的選項。

- (1) 恰有一直線通過  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點
- (2) 恰有一圓通過  $A$ 、 $B$ 、 $D$  三點
- (3) 恰有一個二次多項式函數的圖形通過  $B$ 、 $C$ 、 $D$  三點
- (4) 恰有一個三次多項式函數的圖形通過  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四點
- (5) 可找到兩平行直線，其聯集包含  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四點

【102 數甲】

答：(3)(4)(5)

### 例題篇：知來之對策

1. 設二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中  $a < 0$ 。

若對於任意實數  $t$ ，恆有  $f(-3+t) = f(5-t)$ 。

則  $f(0)$ 、 $f(-2)$ 、 $f(5)$  的大小關係為下列哪一個選項？

- (1)  $f(-2) < f(0) < f(5)$
- (2)  $f(-2) < f(5) < f(0)$
- (3)  $f(0) < f(-2) < f(5)$
- (4)  $f(5) < f(-2) < f(0)$
- (5)  $f(5) < f(0) < f(-2)$

2. 若實係數二次函數  $f(x) = -x^2 + ax + b$  在  $-2 \leq x \leq 6$  的範圍內，存在兩個相異的  $x$  值使  $f(x)$  有相同最小值  $-3$ ，求數對\_\_\_\_\_。

3. 設二次函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，其中  $a < 0$  且  $x \in R$ 。若  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ，且  $\alpha > \beta$ ，問下列何者正確？

- (1) 若  $\beta < x < \alpha$ ，則  $f(x) > 0$
- (2) 若  $x > \beta$ ，則  $f(x) < 0$
- (3)  $f(5\alpha - 4\beta) < 0$
- (4)  $f\left(\frac{3\alpha + \beta}{4}\right) > 0$
- (5)  $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$  是最小值。

4. 等差數列  $\{a_n\}$  前  $n$  項和為  $S_n$ ， $n \in N$ 。

若函數  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的圖形恆過點  $(n, S_n)$ ，且  $S_4 = 24$ ， $a_3 = 7$ 。

則下列哪些選項是正確的？

- (1)  $a + b + 2c = 3$
- (2) 函數  $f(x)$  的圖形不經過第四象限
- (3)  $f(4) = f(8)$
- (4) 函數  $f(x)$  的最小值是  $-2$
- (5)  $x > 0$  時，函數  $f(x)$  與  $g(x) = 2x + 2$  的圖形交於一點