

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 41 天 : 多項式與除法原理

觀念篇

多項式定義:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

稱為不定元 x 之實係數多項式(函數)

$$(a) \quad a_n \neq 0 \Rightarrow \deg f(x) = n$$

$$\text{常數項} = f(0) = a_0$$

$$\text{所有係數和} = f(1)$$

$$\text{所有偶次項係數和} = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$$

$$\text{所有奇次項係數和} = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$$

$$f(i) \text{ 的實部} = \frac{f(i) + f(-i)}{2} = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \cdots$$

$$f(i) \text{ 的虛部} = \frac{f(i) - f(-i)}{2i} = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \cdots$$

$$(b) \quad f(x) = a_0 \text{ 常數多項式}$$

$$a_0 \neq 0 \rightarrow \deg f(x) = 0 \rightarrow \text{零次多項式}$$

$$a_0 = 0 \rightarrow \text{零多項式, 不規定次數}$$

多項式運算:

(1) 除法原理: 多項式 $f(x)$ 、 $g(x)$, $g(x) \neq 0$

都存在唯一一組 $Q(x)$ 、 $R(x)$

使滿足 $f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$,

但 $\deg R(x) < \deg g(x)$, 或 $R(x) = 0$

(2) 設 $f(x)$ 除以 $ax+b$ ($a \neq 0$) 之商為 $q(x)$, 餘式為 r , 則

$$f(x) \text{ 除以 } x + \frac{b}{a} \text{ 之商為 } aq(x), \text{ 餘式為 } r。$$

$$xf(x) \text{ 除以 } ax+b \text{ 之商為 } xq(x) + \frac{r}{a}, \text{ 餘式為 } -\frac{br}{a}。$$

$$x^2 f(x) \text{ 除以 } ax+b \text{ 之商為 } x^2 q(x) + \frac{r}{a}x - \frac{br}{a^2}, \text{ 餘式為 } \frac{b^2 r}{a^2}。$$

(3) 綜合除法: 多項式的變形

多項式餘式定理運用:

1. 階梯法求餘式:

除式為 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 時

$$\begin{aligned} \text{設 } f(x) &= (x-\alpha)(x-\beta)q(x) + ax + b \\ &= (x-\alpha)(x-\beta)q(x) + a(x-\alpha) + f(\alpha) \end{aligned}$$

(其餘依此類推)

2. 除式為 $x^{k-1} \pm x^{k-2} + x^{k-3} \pm x^{k-4} + \dots \pm 1$ 時，考慮以 $x^k \pm 1$ 除之

* (a) $n \in N$,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

(b) n 為正奇數時，

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

(c) n 為正偶數時，

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

3. 泰勒展開式 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

\Rightarrow 以 $(x-a)^2$ 除以 $f(x)$ 之餘式為 $f(a) + f'(a)(x-a)$

例題篇：鑑往之傾向

1. 已知實係數多項式方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 8 = 0$ 的三根相同，
請問 b 的值等於下列哪一個選項？

- (1) 6 (2) 8 (3) 10 (4) 12 (5) 14。

【101 數乙】

答：(4)

2. 設 a, b, c 為實數，且二次多項式 $f(x) = ax(x-1) + bx(x-3) + c(x-1)(x-3)$ 滿足
 $f(0) = 6$ 、 $f(1) = 2$ 、 $f(3) = -2$ 。請問 $a+b+c$ 等於下列哪一個選項？

- (1) 0 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $-\frac{4}{3}$

【102 數乙】

答：(2)

3. 設 $f(x)$ 為一未知的實係數多項式，

但知道 $f(x)$ 除以 $(x-5)(x-6)^2$ 的餘式為 $5x^2 + 6x + 7$ 。

根據上述所給條件，請選出正確的選項。

- (1) 可求出 $f(0)$ 之值 (2) 可求出 $f(11)$ 之值
(3) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)^2$ 的餘式 (4) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-6)^2$ 的餘式
(5) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)(x-6)$ 的餘式

【105 數乙】

答：(4)(5)

例題篇：知來之對策

1. 設 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 5x - 6$ ，則 $f(1-3i) =$

- (1) $-1-15i$ (2) $-1+15i$ (3) $5-6i$ (4) $5+6i$ (5) $1-15i$

2. 設多項式 $f(x) = x^4 - 3x^2 - x + 7 = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 + d(x-2) + e$ ，其中 a, b, c, d, e 為實數，下列哪些選項是正確的？
- (A) $a+b+c+d+e=58$
 (B) $f(2.001) > 0$
 (C) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 得餘式為 $19x+9$
 (D) $y=f(x)$ 的圖形與 y 軸的交點在 x 軸的上方
 (E) 方程式 $f(x)=0$ 在 $x > 2$ 的範圍無實根

3. 已知 $f(x) = kx^4 + 5x^3 - x^2 - 3x + 2$ ，且 $f(x)$ 經整理後可表示為 $f(x) = a(x+2)^4 + b(x+2)^3 + c(x+2)^2 + d(x+2) - 4$ ，則 d 之值為_____。

4. 若多項式 $a(3x-5)^5 + b(3x-5)^4 + c(3x-5)^3 + d(3x-5)^2 + e(3x-5) + k = (5x+1)^5 - 4(5x+1)^4 - 72(5x+1)^3 - 56(5x+1)^2 + 15(5x+1) + 10$ ， $a, b, c, d, e, k \in R$ 為實數，試求 $a+b+c+d+e+k =$ _____。

5. (1) 設 $f(x) = 48x^4 + 96x^3 + 72x^2 + 20x + 6 = a(2x+1)^4 + b(2x+1)^3 + c(2x+1)^2 + d(2x+1) + e$ ，求 a, b, c, d, e 。
 (2) 接上題，求 $f(-0.4999)$ 之近似值準確到小數第四位。
 (3) 求 $(2x+1)^2$ 除 $f(x)$ 之餘式。

6. 多項式函數 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 30x + 25$ ，試問 $f(\log_2 5)$ 最接近下列哪個整數？($\log 2 \approx 0.3010$)
 (1) 8 (2) 10 (3) 12 (4) 14 (5) 16

7. 設多項式 $f(x)$ 的奇數項係數和為 16，若 $f(x)$ 除以 $x^2 + 2$ 的商式為 $q(x)$ ，餘式為 $7x+8$ ，且 $q(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 -3 ，求 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式。

8. 設 $f(x)$ 被 $x-1$ 除之餘式為 4，被 $x^2 - 4x + 5$ 除之餘式為 $px+q$ ，被 $(x-1)(x^2 - 4x + 5)$ 除之餘式為 $(x-r)^2$ ，求 p, q, r 之值。

9. 設實係數多項式 $f(x)$ 除以 $(x-b)(x-c)$ 、 $(x-c)(x-a)$ 、 $(x-a)(x-b)$ 餘式分別是 $3x-1$ 、 $x+1$ 、 $2x+3$ ，求：
- (1) 數對 $(a, b, c) = ?$
 - (2) $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 所得餘式。

