

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 40 天：多項式插值法

觀念篇

1. 插值法的精髓在於：

一個 n 次多項函數，會被 $n+1$ 個相異 x 值點，唯一決定。

解析幾何的說法就是：

(x_i, y_i) 是平面上點 P_i 坐標，給了平面上的 $n+1$ 個點 P_0, P_1, \dots, P_n ，

其橫坐標兩兩相異，只能找到一條代表 n 次多項式的曲線通過這些點。

2. 牛頓插值多項式的求法，

例如：若要找通過 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 三點的二次（含以下）多項式，

則可設 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) + b(x-x_1) + y_1$ ，

再以 $x=x_2$ 、 $x=x_3$ 代入，求出 a 、 b

3. 拉格朗日插值多項式的求法，

例如：若要找通過 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 三點的二次（含以下）多項式，

則可設 $f(x) =$

$$y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

例題篇：鑑往之傾向

1. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 為實係數多項式函數。若 $f(1) = f(2) = 0$ 且 $f(3) = 4$ ，
則 $a + 2b + c$ 的值是下列哪一個選項？

(1)1 (2)2 (3)3 (4)4 (5)5。

【106 數乙】

答：(4)

例題篇：知來之對策

1. 茜茜是個喜愛烹飪的高中生，有一天她將一條鮭魚從冷凍庫拿出來解凍。茜茜希望在烹煮時，魚的溫度至少為 20°C 以上，

因此茜茜以「小時」為單位，紀錄解凍後的時間與溫度，如附表所示，

舉例來說，拿出來解凍 2 小時後，魚的溫度為 -2°C 。

茜茜利用此 4 筆資料來做一個次數為 3 次的插值多項式，用來模擬真實的溫度函數。

試利用此三次多項式來估計，拿出來解凍至少幾小時（整數）後，

茜茜就可以開始調理鮭魚？

(1)6 小時 (2)7 小時 (3)8 小時 (4)9 小時 (5)10 小時。

| | | | | |
|---------------------------|----|----|----|---|
| 時間 (小時) | 0 | 1 | 2 | 4 |
| 魚的溫度 ($^\circ\text{C}$) | -4 | -3 | -2 | 1 |

2. 設 $f(x)$ 為三次多項式，且 $x-1$ 、 $x-2$ 、 $x-3$ 皆為 $f(x)$ 的一次因式，若 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 48，則函數 $y=f(x)$ 與 y 軸的交點座標為_____。

3. 已知 $f(x)$ 為首項係數為 1 的四次方程式，若 $f(2008)=f(2009)=f(2011)=f(2012)=26$ ，則 $f(2010)=$ _____。

4. 已知 $f(x) = \frac{-2}{3} \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$ ，

請選出正確的選項：

- (1) $f(x)$ 的最大值為 $\frac{7}{3}$ (2) $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為 2
(3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $8x-10$
(4) 方程式 $f(x)=0$ 在區間 $(1,4)$ 沒有實根
(5) 滿足不等式 $f(x)>0$ 的整數解恰有 1 個。

5. 已知 $f(x) = 3 \cdot \frac{(x+\sqrt{2})(x-5)}{(\pi+\sqrt{2})(\pi-5)} + 1 \cdot \frac{(x-\pi)(x+\sqrt{2})}{(5-\pi)(5+\sqrt{2})} + 3 \cdot \frac{(x-5)(x-\pi)}{(-\sqrt{2}-5)(-\sqrt{2}-\pi)}$ ，

請選出正確的選項。

- (1) $f(0)>0$
(2) $y=f(x)$ 描繪在座標平面的圖形為開口向上的拋物線
(3) 在座標平面上， $y=f(x)$ 的圖形頂點在第二象限
(4) $xf(x)+0.01=0$ 有 1 個正實根 2 個負實根
(5) $xf(x)-0.01=0$ 的三個實根總和為正數

6. 設 $f(x) = \frac{23}{6}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{10}{3}(x-2)(x-3)(x-4) - 11(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{21}{2}(x-1)(x-3)(x-4)$ ，
則 $f(105) =$ _____。

7. 設 5 次多項式 $f(x)$ 被 $x+2$ 、 x 、 $x-1$ 、 $x-3$ 除之餘式分別為 -3 、 -1 、 -1 、 2 ，則 $f(x)$ 被 $x(x+2)(x-1)(x-3)$ 除之餘式為 $r(x) = ax(x-1)(x-3) + b(x+2)(x-1)(x-3) + c(x+2)x(x-3) + d(x+2)x(x-1)$ ，下列敘述哪些是正確的？
(1) $a>0$ (2) $b+c=0$ (3) $c>d$ (4) $r(0)=f(0)$ (5) $r(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為 -7

8. 設多項式 $f(x)$ 分別除以 x^2+x-2 、 x^2-x-6 、 x^2+x-12 所得餘式依次為 $2x+3$ 、 $3x+a$ 、 $4x+b$ ，選出正確的選項：
(1) $a=5$ (2) $b=-2$
(3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)$ 的餘式為 $9x+1$
(4) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)(x+2)$ 的餘式為 x^2+5x+2

(5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)(x+4)$ 的餘式為

$$5 \cdot \frac{(x-3)(x+4)}{(1-3)(1+4)} + 14 \cdot \frac{(x-1)(x+4)}{(3-1)(3+4)} - 14 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(-4-1)(-4-3)}。$$

9. 小孩因工作業務需求，想要得知上週五升旗時間 7 點 40 分的溫度，於是到氣象局網站查詢資料，但氣象局資料只提供了如附表資訊，小孩決定以多項式函數 $y = f(x)$ 來描述這筆資料，

| | | | |
|-------------------------------|----|-----|----|
| 時間 x (時) | 7 | 7.5 | 8 |
| 溫度 y ($^{\circ}\text{C}$) | 32 | 33 | 34 |

並依此函數推測當日 7 點 40 分 (即 $x = \frac{23}{3}$) 的溫度，請選出正確的選項：

- (1) 滿足這 3 筆資料的多項式函數 $y = f(x)$ 有無限多個，其次數有可能是二次
- (2) 為便於計算，小孩企圖尋求所有滿足此資料的多項式函數 $y = f(x)$ 中次數最低者，設此最低次的多項式為 $g(x)$ ，則 $g(x)$ 必為 $2x + 18$
- (3) 承(2)，如以拉格朗日 (Lagrange) 插值法求得滿足此筆資料的多項式函數為 $y = h(x)$ ，且 $h(x)$ 的次數不到三次，則 $h\left(\frac{23}{3}\right) = 33.\bar{3}$
- (4) 設 $r(x)$ 為 $f(x)$ 除以 $(x-7)(x-7.5)(x-8)$ 的餘式，則 $r(x)$ 亦為滿足此資料的多項式函數，其次數是二次
- (5) 承以上(1)~(4)選項， $g(x) = h(x) = r(x)$ 恆成立。

俞克斌數