

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 39 天：一元二次方程式

### 觀念篇

實係數一元二次方程式  $ax^2+bx+c=0$ ， $a \neq 0$ ，的兩根為  $\alpha$ 、 $\beta$

(1) 根可以代回原式：
$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \\ a\beta^2 + b\beta + c = 0 \end{cases}$$

(2) 公式解：
$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(3) 根與係數關係：
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = +\frac{c}{a} \end{cases}$$

(4) 判別式： $D = b^2 - 4ac > 0$  表兩根為『相異實數』

$D = b^2 - 4ac = 0$  表兩根為『相等實數』

$D = b^2 - 4ac < 0$  表兩根為『共軛複數』

★★ 已知  $D > 0$ ， $a \neq 0$ ，

(1)  $ac > 0 \iff$  二根『同號』。

①  $ab > 0$ ：二根『均負』。

②  $ab < 0$ ：二根『均正』。

(2)  $ac = 0 \implies c = 0$

①  $b \neq 0$ ：一根為 0。

②  $b = 0$ ：兩根均 0。

(3)  $ac < 0 \iff$  二根『異號』。

①  $ab > 0$ ：二根『負多正少』。

②  $b = 0$ ：二根『同值異號』。

③  $ab < 0$ ：二根『負少正多』。

### 例題篇：鑑往之傾向

1. 設  $a$ 、 $b$  為實數。

已知坐標平面上拋物線  $y = x^2 + ax + b$  與  $x$  軸交於  $P$ 、 $Q$  兩點，且  $\overline{PQ} = 7$ 。

若拋物線  $y = x^2 + ax + (b+2)$  與  $x$  軸的兩交點為  $R$ 、 $S$ ，則  $\overline{RS} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【99 學測】

答： $\sqrt{41}$

2. 設  $a$  為實數，令  $\alpha$ 、 $\beta$  為二次方程式  $x^2 + ax + (a-2) = 0$  的兩個根。  
試問當  $a$  為何值時， $|\alpha - \beta|$  有最小值？ 【93 數乙】

答：  $a = 2$

3. 設實係數二次方程式  $x^2 + x + c = 0$  的兩根  $a, b$  都不是實數，  
而且  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$  也正是此方程式的兩根，則  $a^2 + b^2$  的數值為\_\_\_\_\_。 【89 日自】

答：  $-1$

4. 設  $k$  為一整數，若方程式  $kx^2 + 7x + 1 = 0$  有兩個相異實根，  
且兩根的乘積介於  $\frac{5}{71}$  與  $\frac{6}{71}$  之間，則  $k =$ \_\_\_\_\_。 【92 學測】

答：  $12$

5. 設  $\alpha$ 、 $\beta$  為方程式  $x^2 - 2x - 1 = 0$  之二根，  
若  $\alpha^2$ 、 $\beta^2$  為方程式  $x^2 + px + q = 0$  之二根，則  $(p, q) =$ \_\_\_\_\_。 【81 大學聯考】

答：  $(-6, 1)$

6. 設  $a, b \in \mathbb{N}$ ， $x^2 - ax + 817 = 0$ 、 $x^2 - bx + 3553 = 0$ ，有一個共同的質數根，  
則  $a, b$  分別為\_\_\_\_\_。 【88 日社】

答：  $a = 62, b = 206$

### 例題篇：知來之對策

1. 若  $x^2 - 3x + 5 = 0$  之二根為  $\alpha, \beta$ ；求  
(1)  $\alpha^2 + \beta^2$  (2)  $\alpha^3 + \beta^3$  (3)  $(\alpha^4 - 3\alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha - 1)(\beta^3 - 3\beta^2 + 3\beta + 1)$

2.  $\alpha, \beta$  為  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  的二根，求以  $\frac{\beta+1}{\alpha}, \frac{\alpha+1}{\beta}$  為二根之方程式？

3. 設  $\alpha \neq \beta$ ，且兩數分別滿足  $\alpha^2 - 2 = 5\alpha, \beta(5 - \beta) + 2 = 0$ 。

則  $\left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{-5\alpha}{2 - \beta^2}} \right)^2 = ?$

(1)  $-\frac{33}{2}$  (2)  $-\frac{25}{2}$  (3)  $\frac{33}{2}$  (4)  $\frac{25}{2}$  (5) 需考慮  $\alpha, \beta$  的小大關係，無法確定。

4.  $a$  為實數，若多項式  $f(x) = (x^2 + x + 2 - a)(x^2 - x + 2 + a)$  恰可以分解成三個相異的實係數質因式的乘積，則  $a$  的範圍為\_\_\_\_\_。（化為最簡分數）

