俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 38 天：一元高次方程式

觀念篇

牛頓定理：

整係數多項方程式的一次因式檢查法、有理根鑑定法：

設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$ 為整係數多項式，

又 $\alpha,\beta\in Z$，$\alpha\neq 0$，$(\alpha,\beta)=1$，

則 $(\alpha x-\beta)\mid f(x) \underset{\Leftarrow\!\!\!\!/}{\Rightarrow} \alpha\mid a_n$ 且 $\beta\mid a_0$

成雙定理：

1. 多項式的共軛性質

   設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ 是實係數 n 次多項式，z 為複數，

   則 $\overline{f(z)}=f(\overline{z})$

2. 實係數方程式的虛根成對定理

   設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0$ 是實係數 n 次多項方程式，

   若複數 $z=a+bi$（a,b 為實數）是 $f(x)=0$ 的一個虛根，

   則 $\overline{z}=a-bi$ 也是 $f(x)=0$ 的一個虛根。

   亦即 $f(x)=0$ 的虛根個數必為偶數．

3. 有理係數方程式的無理根成對定理

   設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0$ 是有理係數 n 次多項方程式，

   若 $p+\sqrt{q}$ 是 $f(x)=0$ 的一個無理根，則 $p-\sqrt{q}$ 也是 $f(x)=0$ 的一個無理根。

   但若 $p+\sqrt[3]{q}$ 是 $f(x)=0$ 的一個無理根，不能保證 $p-\sqrt[3]{q}$ 也是 $f(x)=0$ 的一個無理根。

韋達定理：

1. 設 α,β,γ 為 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根，則

   $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{-b}{a}$，$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\dfrac{c}{a}$，$\alpha\beta\gamma=\dfrac{-d}{a}$

2. 設 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 為 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 之四根，則

   $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\dfrac{-b}{a}$，$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\dfrac{c}{a}$

   $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=\dfrac{-d}{a}$，$\alpha\beta\gamma\delta=\dfrac{e}{a}$

勘根定理：

1. 設 $f(x)=0$ 是一個實係數多項式方程式，a,b 是兩個相異實數．
   若 $f(a)f(b)<0$（即函數值 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號），
   則方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間至少有一個實根
   （即在 a,b 之間存在一個實數 c，使得 $f(c)=0$）．
2. 注意：在勘根定理中，
   (1)若 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 a,b 之間有奇數個（1個或3個……）實根．
   (2)若 $f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a,b 之間有偶數個（0個或2個……）實根．
3. 設 $a>0$，$n\in N$，則方程式 $x^n=a$ 恰有一正實根

例題篇：鑑往之傾向

1. 設 a、b 均為正整數，
   而方程式 $x^2-ax+15=0$ 與 $x^2-bx+3b-1=0$ 有一共同根，且此共同根為質數，
   則 $b=$________。【101 數乙】

答：12

2. 設 $f(x)$ 是首項係數為1的實係數二次多項式。請選出正確的選項：
   (1)若 $f(2)=0$，則 $x-2$ 可整除 $f(x)$　(2)若 $f(2)=0$，則 $f(x)$ 為整係數多項式
   (3)若 $f(\sqrt{2})=0$，則 $f(-\sqrt{2})=0$　(4)若 $f(2i)=0$，則 $f(-2i)=0$
   (5)若 $f(2i)=0$，則 $f(x)$ 為整係數多項式。【104 學測】

答：(1)(4)(5)

3. 設 $f(x)=x^4-5x^3+x^2+ax+b$ 為實係數多項式，且知 $f(i)=0$(其中 $i^2=-1$)。
   請問下列哪些選項是多項式方程式 $f(x)=0$ 的根？
   (1) $-i$　(2) 0　(3) 1　(4) -5　(5) 5【101 學測】

答：(1)(2)(5)

4. 若 a 為正整數且方程式 $5x^3+(a+4)x^2+ax+1=0$ 的根都是有理根，則 $a=$________。【106 學測】

答：7

5. 設 $f(x)=x(x-1)(x+1)$，請問下列哪些選項是正確的?
   (1) $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$　(2) $f(x)=2$ 有整數解
   (3) $f(x)=x^2+1$ 有實數解　(4) $f(x)=x$ 有不等於零的有理數解
   (5)若 $f(a)=2$，則 $f(-a)=2$【100 學測】

答：(3)

6. 設a、b、c皆為正整數，考慮多項式$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+2$。
請選出正確的選項。
(1) $f(x)=0$無正根
(2) $f(x)=0$一定有實根
(3) $f(x)=0$一定有虛根
(4) $f(1)+f(-1)$的值是偶數
(5) 若$a+c>b+3$，則$f(x)=0$有一根介於-1與0之間 【105學測】

答：(1)(4)(5)

例題篇：知來之對策

1. 設a、$b\in R$，$ab=2$，$a^3+b^3=40$，試求$a+b$之值為______。

2. $f(x)=2x^4+x^3-6x^2-2x+6$，$g(x)=2x^4-3x^3+2x-2$，
若$f(k)=3$，$g(k)=1$，求$k=$______。

3. 已知a為實數，$f(x)=2x^3-7x^2+7x$，$g(x)=2x^3+x^2-13x+8$，
若$f(a)\neq 2$且$g(a)=2$，則a之值為______。

4. 設$f(x)$為三次實係數多項式，且知複數$1+i$為$f(x)=0$之一解。試問下列哪些敘述是正確的?
(1) $f(1-i)=0$
(2) $f(2+i)\neq 0$
(3) $f(2+i)+f(2-i)$的值必為實數
(4) 沒有實數x滿足$f(x)=x$
(5) 若$f(0)>0$且$f(2)<0$，則$f(4)<0$

5. 若$f(x)$為實係數多項式，已知$1+i\log_3 2$為方程式$f(x)=0$之一根（$i=\sqrt{-1}$），
則下列哪些必為方程式$f(x)=0$之根？
(1)$1+i\log_2 3$ (2)$1+i\log_3\frac{1}{2}$ (3)$1+i\log_{\frac{1}{3}}2$ (4)$1+i\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$ (5)$1+i\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}$。

6. $i=\sqrt{-1}$，已知$f(x)=(x-2-i)(x-p)(x-q)$為一整係數多項式，請選出正確的選項。
(1) 方程式$f(x)=0$恰有一實根
(2) 方程式$f(x)=0$有一根為$2-i$
(3) $f(x)$的常數項為5的倍數
(4) $p+q$為實數
(5) $(2+i)(p+q)+pq$為實數

7. 設a、b、c、$d\in R$，$d\neq 0$，
若方程式$x^4-4x^3+ax^2+bx+10=0$有兩根$c+di$及$c+2di$，求$a+b=$______。

8. 設α，β，γ互異且$4\alpha^3-2\alpha+1=0$，$4\beta^3-2\beta+1=0$，$4\gamma^3-2\gamma+1=0$，則
$(\alpha+\beta-3\gamma)(\beta+\gamma-3\alpha)(\gamma+\alpha-3\beta)=$？

9. 已知x_1 , x_2 , x_3 , x_4分別為$x^4-5x^3+mx^2+nx+8=0$的四根，且$x_1+x_2=3$，$x_3\cdot x_4=2$，則$(m,n)=$________。

10. 令$f(x)=2x^3-x^2-14x+5$，設a、b、c三個相異數且函數

$$g(x)=2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)},$$

若$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，$f(c)=g(c)$，則abc之值為________。(化至最簡)

11. 若$f(x)$與$g(x)$皆為實係數三次多項式，且$f(x)=0$與$g(x)=0$有共同虛根，已知$f(1)=-6$，$g(1)=-3$，則下列敘述何者正確？

(1) $f(x)$與$g(x)$的最高公因式為二次式　(2) $f\left(x^3\right)=0$必有實根

(3) $f\left(2^x\right)=-6$有實根　(4) $[g(x)]^3-2f(x)$除以$x-1$的餘式為-15

(5) 若$2xg(x)-f(x)=0$恰有二虛根

12. 設$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$為整係數多項式，已知$f(x)=0$的三根皆為有理數，且$f\left(\sqrt{8}\right)<0$，$f\left(\sqrt{12}\right)>0$，$f\left(\sqrt{20}\right)<0$，$f\left(2\sqrt{7}\right)>0$，則$d$之值為？

(1) 15　(2) 24　(3) -24　(4) -60　(5) 72

13. 若$k\in Z$，$f(x)=3x^3+10x^2+5x-1$，

則滿足$\dfrac{|f(k)|}{f(k)}+\dfrac{|f(k+1)|}{f(k+1)}=0$所有可能的$k$值為________。

14. 設$f(x)$為實係數多項式函數且$f(2)=3$，$f(5)=-8$，$f(9)=6$，則下列哪些選項是正確的？

(1)至少有一個實數α滿足$2<\alpha<5$，使得$f(\alpha)=0$

(2)至少有一個實數α滿足$2<\alpha<5$，使得$f(\alpha)=6$

(3)至少有一個實數α滿足$2<\alpha<5$，使得$f(\alpha)=\alpha$

(4)至少有一個實數α滿足$2<\alpha<9$，使得$f(\alpha)=0$

(5)至少有一個實數α滿足$2<\alpha<3$，使得$f\left(\alpha^2\right)=0$。

15. 設$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中a、b、c為整數，若$f(-1)=6$，$f(1)=-4$，且$f(x)=0$的三根均為有理根，請選出正確的選項。

(1) $f(x)=0$至少有一根介於-1與1之間　(2) $f(x)=0$的三根必為整數

(3) $c=0$　(4) a、b之值無法確定

16. 若 a、b、c、d 為滿足方程式 $x^4-7x^2+x+2=0$ 的解，請選出正確的選項。

(1) a、b、c、d 為四實根

(2) a、b、c、d 為兩實根兩虛根

(3) 當 $-3\le x\le 0$，則 $x^4-7x^2+x+2=0$ 無實根

(4) 若 $f(x)$ 是領導係數為1的四次多項次且滿足 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=-1$，則 $f(x)=0$ 有兩實根兩虛根

(5) 若 $f(x)$ 是領導係數為1的四次多項次且滿足 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=-1$，則當 $1\le x\le 2$，$f(x)$ 恆為負

17. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a、b、c、d 是整數且 $f(1+i)=0$，下列敘述哪些是正確的？

(1) $f(1-i)=0$

(2) 若 $f(x)=0$ 有一有理根 α，則此有理根 α 必為整數

(3) 若 $f(1)=f(2)=0$，則對所有實數 x，$f(x)$ 恆大於0

(4) 若 $f(1)=18$、$f(2)=-6$，則 $f(x)=0$ 必有兩相異實根

(5) 若 $f(1)=18$、$f(2)=-6$，則 $f(0)>0$。