

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 37 天 : 多項不等式

觀念篇

二次不等式

1. 領導係數取正 (最佳為 +1)
2. 將二次不等式視為二次多項方程式分解因式

$$3. \begin{aligned} (x-\alpha)(x-\beta) < 0 &\xrightarrow{\alpha < \beta} \alpha < x < \beta \\ (x-\alpha)(x-\beta) > 0 &\xrightarrow{\alpha < \beta} x > \beta \text{ 或 } x < \alpha \end{aligned}$$

高次不等式

1. 領導係數取正 (最佳為 +1)
2. 將高次不等式視為高次多項方程式分解因式
3. 扣除恆正二次式

$$4. \begin{aligned} (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)^2 < 0 &\xrightarrow{\alpha < \beta < \gamma} x < \alpha \text{ 或 } \beta < x < \gamma, \text{ 但 } x \neq \delta \\ (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)^2 \leq 0 &\xrightarrow{\alpha < \beta < \gamma} x < \alpha \text{ 或 } \beta < x < \gamma, \text{ 或 } x = \delta \\ (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)^2 > 0 &\xrightarrow{\alpha < \beta < \gamma} \alpha < x < \beta \text{ 或 } x > \gamma, \text{ 但 } x \neq \delta \\ (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)^2 \geq 0 &\xrightarrow{\alpha < \beta < \gamma} \alpha \leq x \leq \beta \text{ 或 } x \geq \gamma, \text{ 或 } x = \delta \end{aligned}$$

其餘依此類推

分式不等式

1. $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) \geq 0$, 且 $g(x) \neq 0$, 並依多項不等式處理
2. $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0$, 且 $g(x) \neq 0$, 並依多項不等式處理
3. $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) \leq 0$, 且 $g(x) \neq 0$, 並依多項不等式處理
4. $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0$, 且 $g(x) \neq 0$, 並依多項不等式處理

例題篇：鑑往之傾向

1. 請問對於下列哪些選項，可以找到實數 a ，使得選項裡面所有的數都同時滿足一元二次不等式 $x^2 + (2-a)x - 2a < 0$?
(A) $-1, 0$ (B) $1, 2, 3, \dots$ (所有正整數)

- (C) $-3, -4, -5, \dots$ (所有小於 -2 的整數) (D) $97, 2008$
 (E) $-\pi, \pi$ (π 是圓周率) 【97數乙】

答：(A)(D)

2. 關於多項不等式： $x^2(x+5)(x+1)(x-4)(x-7) < (2x-3)(x+5)(x+1)(x-4)(x-7)$ 。
 下列哪些選項是它的一個解？
 (1) -2π (2) $-\pi$ (3) π (4) 2π 【99數乙】

答：(2)(4)

例題篇：知來之對策

1. 若滿足不等式組 $\begin{cases} |x+5| < 3 \\ (2x-1)(x+1) < (x+1)(x-4) \end{cases}$
 之解為 $\alpha < x < \beta$ ，則數對 $(\alpha, \beta) =$ _____。

2. 已知 $f(x)$ 為二次函數，若不等式 $f(x-1) > 0$ 的解為 $1 < x < 5$ ，
 則不等式 $f(x^2) \leq 0$ 的解為以下哪個選項？

- (1) $x \geq 5$ 或 $x \leq 1$ (2) $1 \leq x \leq 5$ (3) $x \geq \sqrt{5}$ 或 $-1 \leq x \leq 1$ 或 $x \leq -\sqrt{5}$
 (4) $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$ (5) $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$ 或 $x = 0$

3. 多項式不等式 $(x-1)(x-2^2)(x-3^2)(x-4^2)(x-5^2)(x-6^2)(x-7^2) < 0$
 的解中，試求正整數解有多少個？
 (1) 23 個 (2) 24 個 (3) 25 個 (4) 26 個 (5) 27 個

4. 設 $f(x) = \begin{vmatrix} 9-x & 2 & 3 \\ 5 & 5-x & 4 \\ 6 & 4 & 4-x \end{vmatrix}$ ，則下列選項何者正確？

- (1) $f(14) = 0$ (2) $f(x) = 0$ 有一實根介於 4 與 5 之間
 (3) $f(2^x) = 0$ 恰有正一實根 (4) 滿足 $f(x) > 0$ 的正整數解共有 10 個

5. 整係數多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，且 $f(\sqrt{41}-5) = f(1+i) = 0$ ，
 則滿足 $f(x) < 0$ 的整數解有 _____ 個。

6. 不等式 $(x^2 - x + 9)(x+6)(x+3)(x-5)(x-9) < (x+6)^2(x+3)(x-5)(x-9)$ ，
 下列哪些選項是它的一個解？
 (1) -2π (2) $-\pi$ (3) 0 (4) π (5) 2π 。

7. 設實係數多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$,

則下列哪些選項可能為不等式 $f(x) > 0$ 之解?

(1) $-1 < x < 0$ 或 $1 < x < 2$

(2) $0 < x < 2$ 但 $x \neq 1$

(3) $x < 1$ 或 $x > 2$

(4) $x < 1$ 或 $x > 1$

(5) 所有的實數。

8. 不等式 $x(x-2)(x+3) \leq 0$ 的解與下列哪些相同?

(1) $x^2(x-2)(x+3) \leq 0$

(2) $\frac{x(x+3)}{x-2} \leq 0$

(3) $\frac{x(x+3)(x^2-4)}{x+2} \leq 0$

(4) $x(x-2)^3(x+3)(x^2+1) \leq 0$

(5) $(x^2+x-6)(x^5+6x^3+9x) \leq 0$

9. 設 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 分式不等式 $\frac{ax^2+bx+c}{x-1} < 0$ 之解為 $-2 < x < 1$ 或 $x > 3$,

則不等式 $bx^2+cx+a < 0$ 之整數解有多少個?

(1) 0 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 無限多個

10. 請問下列敘述何者錯誤?

(1) 不等式 $\frac{x-1}{x+3} > 1$ 的解與不等式 $x-1 > x+3$ 的解相同

(2) 若多項式方程式 $f(x) = 0$ 有實根介於 3、4 之間, 則 $f(3) \times f(4) < 0$

(3) 不等式 $(x^2+x+1)(x-2)^2 > 0$ 的解為任意實數

(4) 不等式 $(x-1)(x-2) \geq 0$ 的解與不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)^2 \geq 0$ 的解相同

(5) 設 k 為實數, 若不等式 $kx^2 - 3x - 5k < 2x^2 - 3x - 5$ 恆成立, 則 $k < 0$ 。

11. 已知 $y = f(x)$ 的圖形如附圖,

則當 $f\left(\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 10}{x^2 - x - 6}\right) \geq 0$

且 x 為小於 10 的正整數,

所有可能的 x 值總和為 _____。

