

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 36 天：指數函數

觀念篇

1. 指數運算律： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 、 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 、 $(a^m)^n = a^{m \times n}$

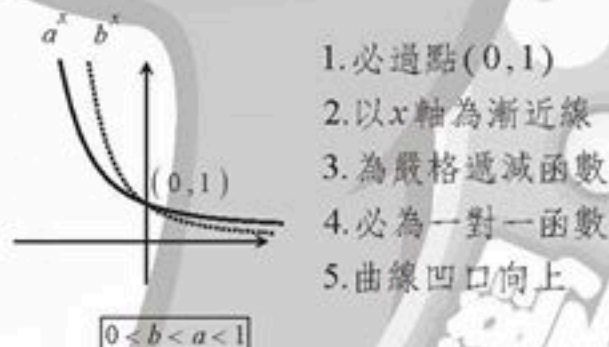
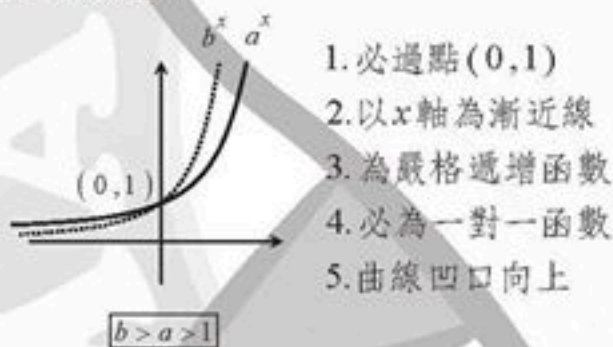
$$(ab)^m = a^m b^m \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

零指數： $(i) a^0 = 1$ (a 為 0 以外之任意實數) $(ii) 0^0$ 無意義

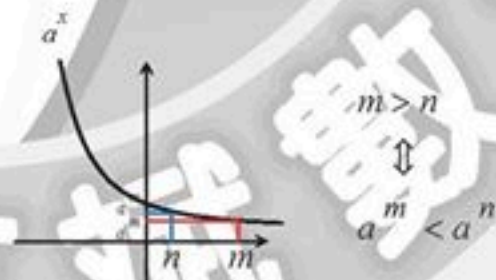
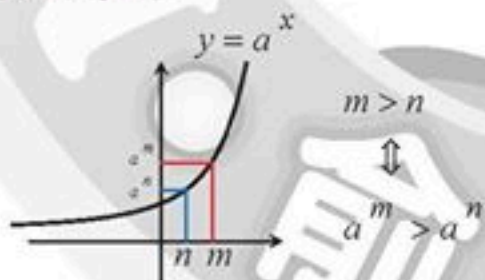
負數指數： $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (a 為 0 以外之任意實數)

分數指數： $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (a 為 0、 R^- 以外之任意實數)

2. 指數函數圖：



3. 指數不等式：



例題篇：鑑往之傾向

1. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。

當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。
試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

(1) 1.7 (2) 3 (3) 5.2 (4) 9 (5) 81。

【106 學測】

答：(3)

2. 放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而120小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為7.5小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？
 (1) 8小時 (2) 10小時 (3) 12小時 (4) 15小時 (5) 20小時 【105學測】

答：(1)

3. 座標平面上滿足 $10^x \cdot 100^y = 1000$ 的所有點 (x, y) 所形成的圖形為下列哪個選項？
 (1) 一個點 (2) 一直線 (3) 兩直線 (4) 一個二次多項式的函數圖形 (5) 一個圓
 【103數乙】

答：(2)

4. 當 (x, y) 在直線 $2x + y = 3$ 上變動時，關於 $K = 9^x + 3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的？
 (1) K 有最大值28、最小值 $6\sqrt{3}$ (2) K 有最大值28、但沒有最小值
 (3) K 沒有最大值、但有最小值12 (4) K 沒有最大值、但有最小值 $6\sqrt{3}$
 (5) K 沒有最大值也沒有最小值。 【101數甲】

答：(4)

5. 在1766年，天文學家波德提出有名的「波德法則」：

行星與太陽的平均距離 d (天文單位)

可以用數學式子 $d = \alpha + \beta \cdot 2^n$ 表示。

行星所對應的 n 值如下表所示：

行星	對應的 n 值
金星	0
地球	1
火星	2
木星	4
土星	5
天王星	6

(1) 設金星與太陽的平均距離為 $d_{\text{金}}$ ，請以 α 及 β 表示 $d_{\text{金}}$ (2分)

(2) 若 $d_{\text{金}}$ 為0.7天文單位，

且火星與太陽的平均距離比金星與太陽的平均距離多0.9(天文單位)，

請求出 α 及 β (8分)

(3) 承上題，請求出地球與太陽的平均距離 (2分)

【93數乙補考】

6. 考慮 x, y, z 的方程組
$$\begin{cases} 2^x - 3^y + 5^z = -1 \\ 2^{x+1} + 3^y - 5^z = 4 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} + a5^z = 8 \end{cases}$$
，其中 a 為實數。請選出正確的選項：

(1) 若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $x=0$

(2) 若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $y>0$

(3) 若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $y<z$

(4) 當 $a \neq -3$ 時，恰有一組 (x, y, z) 滿足此方程組

(5) 當 $a \neq -3$ 時，滿足此方程組的所有解 (x, y, z) 會在一條直線上

【103 數甲】

答：(1)(2)

7. 設 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ， $g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ，其中 $e > 1$ 。

(1) 試求： $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 =$ _____

(2) 試以 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $f(y)$ 、 $g(y)$ 表示： $(1)f(x+y)$ ； $(2)g(x+y)$ 。 【77 日自】

8. 右圖為某池塘中布袋蓮蔓延的面積與時間的關係圖。假設其關係為「指數函數」，試問下列敘述何者為真？

(A) 此指數函數的底數為 2

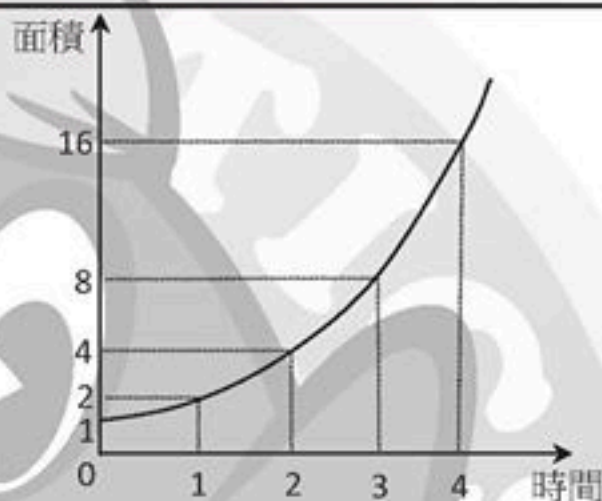
(B) 在第 5 個月時，布袋蓮的面積就會超過 $30m^2$

(C) 布袋蓮從 $4m^2$ 蔓延到 $12m^2$ 只需 1.5 個月

(D) 設布袋蓮蔓延到 $2m^2$ 、 $3m^2$ 、 $6m^2$

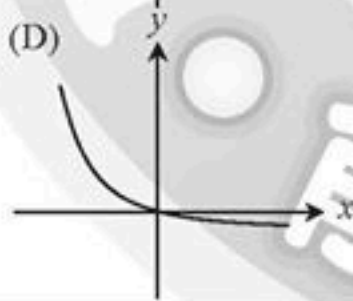
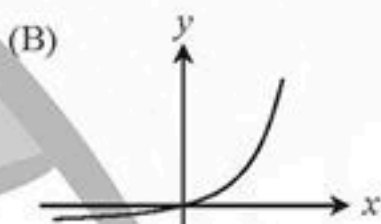
所需的時間分別為 t_1 、 t_2 、 t_3 ，則 $t_1 + t_2 = t_3$

(E) 布袋蓮在第 1 到第 3 個月之間的蔓延平均速度等於在第 2 到第 4 個月之間的蔓延平均速度。



【87 學測】

9. 若 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ，則下列各圖形中，何者可能是指函數 $y = a^x$ 的部分圖形？



【87 日社】

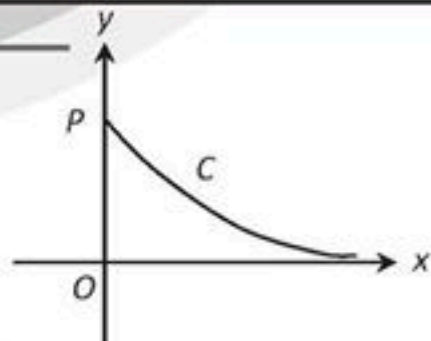
10. 右圖中的曲線 C 為函數 $y = a^{|x|}$ 的圖形的一部份。

P 點為曲線 C 與 y 軸的交點。

問下列敘述何者為真？

(A) $a > 1$ (B) $\overline{OP} = 1$

(C) $y = a^{|x|}$ 的圖形對稱於 y 軸



(D) $y = a^{|x|}$ 的圖形與 $y = a^{-|x|}$ 的圖形對稱於 x 軸。【76 日社】

答：(B)(C)

11. 觀察相關的函數圖形，判斷下列選項何者為真？

- (1) $10^x = x$ 有實數解 (2) $10^x = x^2$ 有實數解
(3) x 為實數時， $10^x > x$ 恆成立 (4) $x > 0$ 時， $10^x > x^2$ 恆成立
(5) $10^x = -x$ 有實數解

【91 學測】

答：(2)(3)(4)(5)

12. 坐標平面上，在函數圖形 $y = 2^x$ 上，標示 A 、 B 、 C 、 D 四個點，其 x 坐標分別為 -1 、 0 、 1 、 2 。請選出正確的選項：

- (1) 點 B 落在直線 AC 下方
(2) 在直線 AB 、直線 BC 、直線 CD 中，以直線 CD 的斜率最大
(3) A 、 B 、 C 、 D 四個點，以點 B 最靠近 x 軸
(4) 直線 $y = 2x$ 與 $y = 2^x$ 的圖形有兩個交點
(5) 點 A 與點 C 對稱於 y 軸。

【104 學測】

答：(1)(2)(4)

13. 令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$ ， $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$ ， $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ 。請選出正確的大小關係。

- (1) $a > b > c$ (2) $a > c > b$ (3) $b > a > c$ (4) $b > c > a$ (5) $c > b > a$

【102 學測】

答：(4)

14. 設 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ， $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ， $c = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ 。下列選項何者為真？

- (A) $a > b > c$ (B) $a < b < c$ (C) $a = c > b$ (D) $a = c < b$ (E) $a = b = c$

【90 學測】

15. 對任意實數 x 而言， $27\left(x^2 + \frac{2}{3}\right)$ 的最小值為

- (1) 3 (2) $3\sqrt{3}$ (3) 9 (4) 27 (5) $81\sqrt{3}$

【97 學測】

答：(3)

16. 根據過去長期統計資料顯示：

某公司推銷員的年資 x (年)，與每次推銷成功的機率 $y(x)$ ，

滿足下列關係式：
$$y(x) = \frac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}$$

(1) 化簡 $r(x) = \frac{y(x)}{1-y(x)}$ ，並說明 $r(x)$ 的值隨 x 增大而增大（即 $r(x)$ 為遞增函數）。

(2) 說明年資8年(含)以上的推銷員，每次推銷不成功的機率小於4%

【94數乙】

17. 某君於九十年初，在甲、乙、丙三家銀行各存入十萬元，各存滿一年後，分別取出。

已知該年各銀行之月利率如下表。

且全年十二個月皆依機動利率按月以複利計息。

	甲銀行	乙銀行	丙銀行
1~4月	0.3%	0.3%	0.3%
5~8月	0.3%	0.4%	0.2%
9~12月	0.3%	0.2%	0.4%

假設存滿一年，某君在甲、乙、丙三家銀行存款的本利和分別為 a 、 b 、 c 元，請問下列哪些式子為真？

(1) $a > b$ (2) $a > c$ (3) $b > c$ (4) $a = b = c$

【91數甲】

答：(A)(B)

例題篇：知來之對策

1. 設 $f(x) = 101(x^5 + x^3 + x)$ ，若 $f(a) = 2012$ ，求 $f(-a) = ?$

(1) $\frac{1}{2012}$ (2) $-\frac{1}{2012}$ (3) 2012 (4) -2012 (5) 無意義。

2. 設實數 x 、 y 滿足 $19^x = 8 \cdot 152^y = 16$ ，則 $\frac{3y-4x}{xy}$ 的值 = _____。

3. 一般而言，玩樂時間過長，自然會影響到讀書時間，也會影響到成績的表現。根據以往的經驗，如果平均每星期花 x 小時研讀數學，

則該科段考成績是 $y = \frac{10^{2x-6}}{10+10^{2x-6}} \times 100$ (分)。

試問：老王平均每星期要花 _____ (小時) 研究數學，才能在段考中至少80分。(四捨五入至小數點第一位)

4. 下列那個 m 值可以使得方程式 $3 \cdot 16^x - 2m \cdot 4^x - m + 6 = 0$ 有兩個相異實數？

(1) -7 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 7

5. 右圖為 $y = g(x)$ 的函數圖形，已知 $g(x)$ 是 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

的平移，則下列敘述何者正確？_____。

(1) $f(x)$ 與 $y = 0$ 無交點

(2) $g(x)$ 可能是 $f(x)$ 只作左移的結果

(3) $g(x)$ 可能是 $f(x)$ 只作下移的結果

(4) $g(x)$ 以 $y = -2$ 為漸近線

(5) 若 $A(-2, 0)$ 且 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+k} + b$ (其中 $k, b \in \mathbb{R}$)，則 $k = \frac{3}{2}$

6. 下列哪些值為不等式 $(3-2\sqrt{2})^{3x+1} > \left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right) \cdot (3-2\sqrt{2})^{5x-2}$ 的解？

(1) 1 (2) -3 (3) $\log_3 2$ (4) $\log_2 5$ (5) 5

7. 設函數 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ， $g(x) = 3^x - 2$ ，集合 $M = \{x \in \mathbb{R} \mid f(g(x)) > 0\}$ ， $N = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) < 2\}$ ，則 $M \cap N$ 為何？

(1) $x > 1$ (2) $0 < x < 1$ (3) $-1 < x < 1$ (4) $x < 1$ (5) $-1 < x$

8. 設 $y = -4^x + 3 \cdot 2^{x+1}$ ，其中 $-2 \leq x \leq 2$ ，若 y 的最大值為 a ，最小值為 b ，試求對數 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 對任意實數 x ，不等式 $(0.9)^{\frac{2x^2+kx+k}{2x^2+3x+3}} \geq 0.81$ 恆成立，則 k 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

俞克斌數