俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 35 天：對數函數

觀念篇

1. 指數對數互換：$a^x=b \Leftrightarrow \log_a b=x$

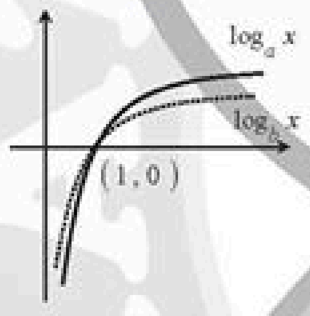
$\log_a b \xrightarrow{\text{自然限制}} b>0, a>0, a\neq 1$

2. 對數運算律：

$\log_a m+\log_a n=\log_a mn$、$\log_a m-\log_a n=\log_a \dfrac{m}{n}$

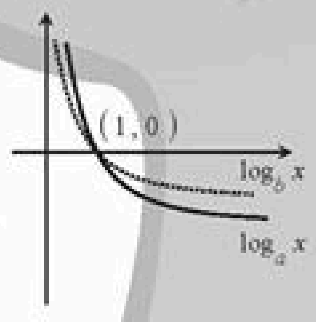
【換底】$\log_a b=\dfrac{\log_r b}{\log_r a}$　　【取對數】$\log_a b^m=m\log_a b$

3. 對數函數圖：



$b>a>1$

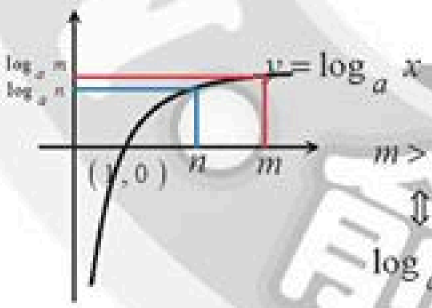
1. 必過點$(1,0)$
2. 以y軸為漸近線
3. 為嚴格遞增函數
4. 必為一對一函數
5. 曲線凹口向下



$0<b<a<1$

1. 必過點$(1,0)$
2. 以y軸為漸近線
3. 為嚴格遞減函數
4. 必為一對一函數
5. 曲線凹口向上

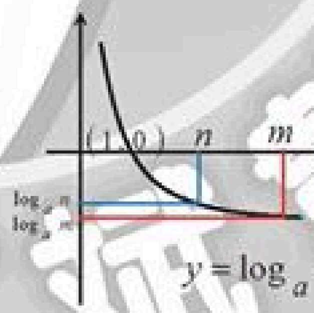
4. 對數不等式：



$m>n$

$\Updownarrow$

$\log_a m>\log_a n$



$m>n$

$\Updownarrow$

$\log_a m<\log_a n$

例題篇：鑑往之傾向

1. 請問下列哪一個選項等於$\log\left(2^{\left(3^5\right)}\right)$？

(1)$5\log\left(2^3\right)$　(2)$3\times 5\log 2$　(3)$5\log 2\times\log 3$

(4)$5\left(\log 2+\log 3\right)$　(5)$3^5\log 2$　【103 學測】

答：(5)

2. 請問指數方程式 $2^{10^x}=10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？
（$\log 2\approx 0.3010$ 、 $\log 3\approx 0.4771$ 、 $\log 7\approx 0.8451$ ）
(1) 1.1 (2) 1.2 (3) 1.3 (4) 1.4 (5) 1.5 【103 數甲】

答：(3)

3. 設 $a=\sqrt[3]{10}$ 。關於 a^5 的範圍，試選出正確的選項。
(1) $25\le a^5<30$ (2) $30\le a^5<35$ (3) $35\le a^5<40$
(4) $40\le a^5<45$ (5) $45\le a^5<50$ 【106 數甲】

答：(5)

4. 設 $a=10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$b=a^{\sqrt{2}}$ 。請選出正確的選項。
(1) $1<a$ (2) $a<\sqrt{3}$ (3) $a^2<b^{\sqrt{3}}$ (4) $10^{0.4}<b<10^{0.5}$ (5) $(ab)^{\sqrt{2}}<10$
【105 數乙】

答：(1)(3)(4)

5. 下列哪一個選項的值最大？
(1) $\log_2 3$ (2) $\log_4 6$ (3) $\log_8 12$ (4) $\log_{16} 24$ (5) $\log_{32} 48$ 。 【106 數乙】

答：(1)

6. 半導題產業的摩爾定律認為『積體電路板可容納的電晶體數目每兩年增加一倍』。用 $f(t)$ 表示從 $t=0$ 開始，電晶體數目隨時間 t 變化的函數，並假設 $f(0)=1000$ 。下面選項中，請選出可以代表摩爾定律的公式。
(1) 若 t 以年為單位，則 $f(t)=1000+\dfrac{1000}{2}t$
(2) 若 t 以月為單位，則 $f(t)=1000+\dfrac{1000}{24}t$
(3) 若 t 以年為單位，則 $f(t)=1000\cdot\left(\sqrt{2}\right)^t$
(4) 若 t 以年為單位，則 $\log f(t)=3+\dfrac{\log\left(\dfrac{3t}{2}+1\right)}{2}$
(5) 若 t 以月為單位，則 $\log f(t)=3+\dfrac{\log 2}{24}t$ 【104 數乙】

答：(3)(5)

7. 滿足不等式 $\dfrac{1}{104}\le\left(\sqrt{10}\right)^x\le 2015$ 的整數 x 共有多少個？
(1) 9 個 (2) 10 個 (3) 11 個 (4) 12 個 (5) 13 個 【104 數甲】

答：(3)

8. 設a_1、a_2、a_3、…、a_{10}是一等比數列，其首項$a_1>1$且公比$r>1$。
坐標平面上有一質點M自原點$(0,0)$出發，依以下規則連續移動十次：
第一次移動往右$\log a_1$單位，第二次移動向上$\log a_2$單位，
第三次移動往右$\log a_3$單位，第四次移動向上$\log a_4$單位，
依此類推直到第十次；即第$2k-1$次的移動是往右$\log a_{2k-1}$單位，
接著第$2k$次的移動是向上$\log a_{2k}$單位。
已知經過這十次的移動後，
該質點M停在點$\left(5+5\log 2,5+\frac{15}{2}\log 2\right)$的位置上，
試問首項a_1與公比r組成的序對$\left(a_1,r\right)$為以下哪一選項？
(1)$\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$　(2)$\left(2\sqrt{2},\sqrt{5}\right)$　(3)$\left(2,\sqrt{2}\right)$　(4)$\left(5,\sqrt{5}\right)$　(5)$\left(5,\sqrt{2}\right)$
【96 數甲】

答：(5)

9. 已知在一容器中有A，B兩種菌，
且在任何時刻A，B兩種菌的個數乘積為定值10^{10}。
為了簡單起見，科學家用$P_A=\log\left(n_A\right)$來記錄A菌個數的資料，
其中n_A為A菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？
(1) $1\le P_A\le 10$
(2) 當$P_A=5$時，B菌的個數與A菌的個數相同
(3) 如果上週一測得P_A值為 4 而上週五測得P_A值為 8，表示上週五A菌的個數是上週一A菌個數的 2 倍
(4) 今天的P_A值比昨天增加 1，則今天的A菌比昨天多了 10 個
(5) 假設科學家將B菌的個數控制為 5 萬個，則此時$5<P_A<5.5$
【97 學測】

答：(2)(5)

10. 考慮座標平面上滿足$2^x=5^y$的點$P(x,y)$，試問下列哪一個選項是錯誤的？
(1) $(0,0)$是一個可能的P點
(2) $(\log 5,\log 2)$是一個可能的P點
(3) 點$P(x,y)$滿足$xy\ge 0$
(4) 所有可能的點$P(x,y)$構成的圖形為一直線
(5) 點P的x、y座標可以同時為正整數
【100 數甲】

答：(5)

例題篇：知來之對策

1. 已知$\log_4 x=\log_9 y=\log_6(x-y)$，則$\sqrt{\frac{x}{y}}=$______。

2. 座標平面上，直線 $x=k$（$k>0$）與 $y=\log_2 x$、$y=\log_{\frac{1}{4}} x$ 的圖形分別交於 A_k、B_k。則關於四邊形 $A_2B_2B_4A_4$、$A_{\frac{1}{3}}B_{\frac{1}{3}}B_3A_3$、$A_{\frac{1}{4}}B_{\frac{1}{4}}B_2A_2$ 的面積分別為 S_1、S_2、S_3，請選出正確的選項。（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3=0.4771$）

(1) $S_1>S_2>S_3$　(2) $S_2>S_1>S_3$　(3) $S_2>S_3>S_1$

(4) $S_3>S_2>S_1$　(5) $S_3>S_1>S_2$

3. 坐標平面上，直線 $x=m$（$m>0$）與對數函數 $y=\log_2 x$、$y=\log_4 x$、$y=\log_8 x$ 圖形分別交於點 A_m、B_m、C_m，下列敘述何者正確？

(1) $\overline{A_1A_2}=\sqrt{2}$　(2) $\overline{A_3B_9}=6$

(3) $\overline{A_2B_2}$，$\overline{A_4B_4}$，$\overline{A_8B_8}$ 成等比數列

(4) $\overline{A_3B_3}$，$\overline{A_6B_6}$，$\overline{A_{12}B_{12}}$ 成等差數列

(5) $\overline{A_8B_8}:\overline{A_8C_8}=3:4$

4. 已知函數 $f(x)=\ell og\dfrac{1-x}{1+x}$，若 $f(a)=b$，則 $f(-a)=$？

(A) b　(B) $-b$　(C) $\dfrac{1}{b}$　(D) $-\dfrac{1}{b}$　(E) $-\sqrt{b}$

5. 設 $2\le x\le 100$，$2\le y\le 100$，且 $4\log_x y-3\log_y x+11=0$，若 $6y^2+x$ 之最小值為 m，最大值為 M，則 $m+M=$______。

6. 已知放射性鐳半衰期為 1800 年，今在某地區出土一具先民遺骸，其體內含有放射性鐳只剩下生前的 15%，則估計死亡年代距今約多少年前？

(1) 6000　(2) 5750　(3) 5500　(4) 5250　(5) 5000　（$\log 2\cong 0.3010$，$\log 3\cong 0.4771$）

7. 已知 $2^{\log_x 81}=3^{\log_y 16}=k$ 且 $\log_3 x+\log_2 y=1$，則 $k=$______。

8. 設 $a>0$，$b>0$，滿足 $a^b=b^a$ 且 $b=9a$，得 $a=P^{\frac{1}{4}}$，則 $P=$？

9. 日本大地震，福島核災外洩某放射物質，而此放射物質需每10年才能衰減10% 的量，今假設目前海洋中此放射物質的含量為 A，經 x 年後此放射物質的含量以指數函數 $Q(x)$ 表示，試回答下列問題：

(1) 寫出指數函數 $Q(x)$

(2) 若海洋生物學家研究海洋生物要正常生存的條件為此放射物質的含量必須在目前含量的一半以下，則至少要經過多少年（取整數），海洋生物才能正常生存？

10. 某養殖場飼養台灣鯛魚，其中一個魚池受到病毒感染，且經過 t 小時魚隻的受感染率定義為 $f(t)=\dfrac{t\text{小時受感染的魚隻數量}}{\text{魚隻總數量}}$，已知 $f(t)=\dfrac{1}{1+a\cdot 7^{-bt}}$，且此養殖場開始時 $(t=0)$ 有 2%的魚隻受到感染，經過 3 小時，受感染的魚隻增為 12.5%，
$(\log 2=0.3010$，$\log 7=0.8451)$
(1) 求 a 值和 b 值。
(2) 若不及時投藥，n 小時後該魚池會有超過 80%的魚隻被病毒感染，求最小的正整數 n 值

11. 某老板為了提昇工廠的競爭力，改善營運績效；決定在五年之後將工廠的採購成本減少 20%。老板希望每年依固定的比率（當年和前一年支出的比）逐年降低。若要達到這項目標，則該工廠每年至少要比前一年減少______%的採購成本，才可以順利達成預定的目標。$(\log 952\approx 2.9806)$

12. 若 (a,b) 是對數函數 $y=\ell og x$ 圖形上一點，
則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上？
(1) $(1,0)$ (2) $(10a,b+1)$ (3) $(2a,2b)$ (4) $\left(\dfrac{1}{a},1-b\right)$ (5) $\left(a^2,2b\right)$。

13. 下表是以 a 為底數的簡易對數表，下列選項中的數值，何者最可能是 a 的值？

x	2	5	7	11
$\ell og_a x$	0.1934	0.4991	0.5430	0.6692

(1) 21 (2) 30 (3) 36 (4) 42 (5) 54。

14. 設 $(\log y)^2+\left(2^{1+x}+2^{1-x}\right)\log y+\left(2^{1+2x}+2^{1-2x}\right)=0$，求 $x+y=$______。
（請化為最簡分數）

15. 已知 n 為正整數，多項式 $x^n=(3x+2)^n\cdot a+r(x)$，a 為實數。令 x^n 除以 $(3x+2)^n$ 所得餘式 $r(x)$ 的常數項為 r_n，則滿足 $\left|10\times r_n\right|<1$ 的最小正整數 n 為______。

16. 若 a、b 是方程式 $2(\log x)^2-4\log x+1=0$ 的根，則 $\left(\log\dfrac{a}{b}\right)^2$ 的值為？
(1)1 (2)2 (3)3 (4)4 (5)5

17. 請問下列敘述哪些是正確的？
(1) 將 $y=\log x$ 的圖形向右平移 2 個單位後，可以得到 $y=\log(x-2)$ 的圖形
(2) 將 $y=\log x$ 的圖形向上平移 3 個單位後，可以得到 $y=\log 1000x$ 的圖形
(3) $y=\log_{a^2} x^2$ 的圖形與 $y=\log_a x$ 的圖形相同
(4) $y=\log_2 x$ 的圖形與 $y=\log_{0.5} x$ 的圖形對稱於 x 軸

(5) $y=\log_2 x$的圖形與$y=\log_2|x|$的圖形對稱於y軸

18.若$2^a=\log_{\frac{1}{2}} a$，$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_2 b$，$2^c=\left(\frac{1}{2}\right)^c$，$\left(\frac{1}{2}\right)^d=\log_{\frac{1}{2}} d$，$\log_2 e=\log_{\frac{1}{2}} e$，則下列敘述何者正確？

(1) $0\le a,b,c,d,e\le 1$

(2) $c<d<a<b<e$ (3)$c<d<a<e<b$ (4)$c<a<d<e<b$ (5)$c<a<e<d<b$

19.設方程式$x+\log_2 x=1$，$x+\log_2 x=2$，$x+\log_3 x=3$的根分別是a、b、c，則下列選項何者正確？

(1) $a<b<c$ (2) $a<c<b$ (3) $b<c<a$ (4) $b<a<c$ (5) $c<a<b$

20.設$1<a<b<a^2$，

比較下列四數$x=\ell og_a b$、$y=\ell og_b a$、$z=\ell og_a \frac{a}{b}$、$w=\ell og_b \frac{b}{a}$之大小關係？

(A) $x>y>z>w$ (B) $x>y>w>z$ (C) $x>w>y>z$

(D) $w>z>x>y$ (E) $w>z>y>x$

21.已知$a=2^{0.8}$，$b=\ell og_\pi 3$，$c=\ell og_2\left(\sin\frac{3}{5}\pi\right)$，則下列選項何者正確？

(1)$a>b>c$ (2)$a>c>b$ (3)$b>a>c$ (4)$b>c>a$ (5)$c>a>b$。

22.下列哪些a值可使方程式$x^2-2x+\ell og\left(2a^2-a\right)=0$有兩個正實根？

(1)$a=1$ (2)$a=-\sqrt{2}$ (3)$a=\frac{1}{\pi}$ (4)$a=\ell og_5 15$ (5)$a=\tan\frac{5\pi}{18}$。