

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 33 天：常用對數

觀念篇

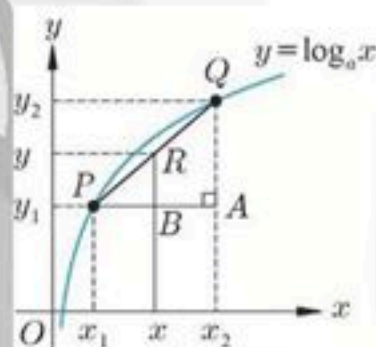
1. (線性) 內插法

如右圖，已知 $\log_a x_1 = y_1$ 、 $\log_a x_2 = y_2$ ，

在一小段範圍內，可以將誤差忽略，當 $x_1 < x < x_2$ ，

利用斜率 (或相似形)，亦即：
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

利用內分點公式，可求出 $y = \log_a x$ 的近似值



2. 常用對數表 (以 10 為底)：

x											表尾差								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	26	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1001	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19

舉例：(1)由外而內查表： $\log 1.34 = 0.1271$ 、 $\log 1.342 = 0.1277$

(2)由內而外查表： $0.2455 = \log 1.76$ 、 $0.2457 = \log 1.761$

例題篇：鑑往之傾向

1. 設 a, b, x 皆為正整數且滿足 $a \leq x \leq b$ 及 $b - a = 3$ 。若用內插法從 $\log a \cdot \log b$

求得 $\log x$ 的近似值為 $\log x \approx \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b = \frac{1}{3} (1 + 2 \log 3 - \log 2) + \frac{2}{3} (4 \log 2 + \log 3)$ ，

則 x 的值為_____。

【106 學測】

答：47

2. 若正實數 x, y 滿足 $\log_{10} x = 2.8$ 、 $\log_{10} y = 5.6$ ，

則 $\log_{10} (x^2 + y)$ 最接近下列哪一個選項的值？

(1) 2.8 (2) 5.6 (3) 5.9 (4) 8.4 (5) 11.2

【101 學測】

答：(3)

3. 坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y=\log_{10} x$ 、 $y=\log_2 x$ 的圖形於 P 、 Q 兩點；
直線 $x=10$ 分別交函數 $y=\log_{10} x$ 、 $y=\log_2 x$ 的圖形於 R 、 S 兩點。
試問四邊形 $PQRS$ 的面積最接近下列哪一個選項？（ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ）
(1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13 (5) 14

【102 數甲】

答：(3)

4. 右表為常用對數表 $\log_{10} N$ 的一部分：

請問 $10^{3.032}$ 最接近下列哪一個選項？

- (1) 101
(2) 201
(3) 1007
(4) 1076
(5) 2012

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1001	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430

【101 學測】

答：(4)

5. 統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，

t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100\left(1-2^{-kt}\right)\%$ ，

其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，

假設在發布後 3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息。

又設最快要 T 小時後，有 99% 的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？

- (1) 5 小時 (2) $7\frac{1}{2}$ 小時 (3) 9 小時 (4) $11\frac{1}{2}$ 小時 (5) 13 小時

【92 學測】

6. 地震規模的大小通常用芮氏等級來表示。

已知芮氏等級每增加 1 級，地震震幅強度約增加為原來的 10 倍，

能量釋放強度則約增加為原來的 32 倍。

現假設有兩次地震，所釋放的能量約相差 100,000 倍，

依上述性質則地震震幅強度約相差幾倍？請選出最接近的答案。

- (1) 10 倍 (2) 100 倍 (3) 1000 倍 (4) 10000 倍

已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$

【94 數甲】

7. 在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長，

假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍，

細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍。

若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，

則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10？

- (1) 24 小時。 (2) 48 小時。 (3) 69 小時。 (4) 96 小時。 (5) 117 小時。

【95 學測】

8. 在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，

並且以每小時增加 8% 的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，

則100小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？

- (1) 9 千隻 (2) 108 千隻 (3) 2200 千隻 (4) 3200 千隻 (5) 32000 千隻 【99學測】

答：(3)

9. 某甲在股票市場裡買進賣出頻繁。假設每星期結算都損失該星期初資金的1%，而第 n 星期結束後資金總損失已超過原始資金的一半，則 n 最小為_____。

(已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 3 = 0.4771$ ， $\log_{10} 11 = 1.0414$)

【89日自】

答：69

10. 某公司為了響應節能減碳政策，

決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的75%。

公司希望每年依固定的比率(當年和前一年排放量的比)逐年減少二氧化碳的排放量。

若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少_____ %的二氧化碳的排放量。

(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)

【98學測】

答：5.6

11. 台灣證券交易市場規定股票成交价格只能在前一個交易日的收盤價(即最後一筆的成交价)的漲、跌7%範圍內變動。例如：某支股票前一個交易日的收盤價是每股100元，則今天該支股票每股的買賣價格必須在93元至107元之間。

假設有某支股票的价格起伏很大，某一天的收盤價是每股40元，

次日起連續五個交易日以跌停板收盤(也就是每天跌7%)，

緊接著卻連續五個交易日以漲停板收盤(也就是每天漲7%)。

請問經過這十個交易日後，該支股票每股的收盤價最接近下列哪一個選項中的價格？

- (1) 39元 (2) 39.5元 (3) 40元 (4) 40.5元 (5) 41元

【93學測】

12. 前行政院長提出知識經濟，喊出10年內要讓台灣double(加倍)。

一般小市民希望第11年開始的新水加倍。

如果每年調薪 $a\%$ ，其中 a 為整數。

欲達成小市民的希望， a 的最小值為_____ (參考數值： $\log 2 \approx 0.3010$)

【91數乙】

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log(1+0.01x) \approx$	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374

13. 經濟學上有所謂「72規則」，意指當經濟年成長率維持在 $r\%$ 時，

經濟規模實際達到兩倍所需要的最少時間約為 $\frac{72}{r}$ 年。試利用下表的數據，

從選項中選出符合此規則的年成長率。

x	1.03	1.04	1.06	1.08	1.09	2
$\log x$	0.0128	0.0170	0.0253	0.0334	0.0374	0.3010

- (1) 9% (2) 8% (3) 6% (4) 4% (5) 3%

【93數乙(總)】

14. 根據內政部統計，台灣地區在西元2000年底有2228萬人，

而最近九年的人口平均年增加率為0.0087。

假設此後一世紀內，人口的年增加率皆為 0.0087，試利用上面的部分常用對數表求台灣地區人口增加 50% 而達到 3342 萬時，

會最接近下面所列的哪一年（西元）？（ $\log_{10} 1.23 = 0.0899$ ）

(A)2040 (B)2050 (C)2060 (D)2070 (E)2080

【90 日自】

15. 設年利率為 12.5%，若依複利計算，則至少要_____年(取整數年數)，本利和才會超過本金的 2 倍。

$\log 9 = 0.9542$ 、 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 8 = 0.9030$ 。

【86 日自】

16. 某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6% 複利計算，則某甲需要_____年就可還清。

(答案以四捨五入計算成整數，而 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 1.006 = 0.0026$)

【88 日自】

17. 統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現：我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。

例如：大圖形是小圖形的 3 倍，眼睛感覺到的只有 $3^{0.7}$ (約 2.16) 倍。

觀察某個國家地圖，感覺全國面積約為某縣面積的 10 倍，

試問這國家的實際面積大約是該縣面積的_____倍

(已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ 、 $\log 7 = 0.8451$)

(1) 18 倍 (2) 21 倍 (3) 24 倍 (4) 27 倍 (5) 36 倍

【93 數乙】

例題篇：知來之對策

1. 下表為常用對數表 $\log_{10} N$ 的一部分：

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0532	0569	0607	0645	0682	0719	0755
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

請問 $10^{2.48}$ 最接近下列哪一個選項？

(1)102 (2)248 (3)302 (4)348 (5)480。

2. 某公司實施人員經進政策，加強員工內部管理與進修並同時增進福利，希望藉此激勵員工士氣，達到五年後公司的獲利超過目前的 2 倍。假設每年獲利成長率固定，若要達成這個目標，則每年獲利成長率至少為_____%(四捨五入至整數位)

常用對數表 $y = \log_{10} x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

3. 保險公司對小文宣稱，只要在2017年預先繳交30萬元，即可享有終身醫療險，並且30萬元會在40年後全數歸還給小文當作退休金。但這樣的說法並未考慮到通貨膨脹，假設同面額的金錢價值僅有上一一年度的96%（即今年的100萬與去年的96萬同價值），不考慮其他因素，試計算40年後，保險公司歸還的30萬元，實際僅價值相當於2017年的_____萬元。（四捨五入至小數點後第二位， $\log 0.96 \approx -0.0177$ 、 $\log 1.96 \approx 0.292$ ）

4. 小高欲利用20年的時間準備自己未來的購屋基金，假設小高每2個月可以存30000元到銀行，若銀行願意提供每2個月0.6%的固定利率，依照複利計算，則20年期滿後小高可以從銀行領回_____萬元。（四捨五入至萬元）（ $\log 1.006 = 0.0026$ ）

常用對數表 $y = \log_{10} x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
∴			∴					∴		
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
∴			∴					∴		

5. 「GO黑動」錢莊貸款一律採「九出十三歸」法則計算：貸款者借10000元，實拿9000元（1000元為貸款手續費），一期（10天）後須償還13000元，並且採複利計算。今阿拓跟「GO黑動」貸款20000元（實拿18000元），且期間未償還任何借款，則最少經過_____個月後，阿拓須償還超過4000000元。（ $\log 1.3 \approx 0.1139$ ，一個月以30天計，不足一個月者以一個月計算）

6. 設某銀行存款的年利率為5%，小維每年存入1萬元，若以複利計算，每年複利一次，且他從不提款，則40年後在他存入第41次的前一刻，依四捨五入法取到萬位，他銀行的錢約有_____萬元。

x	1.04	1.05	7.03	7.04	7.05	7.06
log x	0.0170	0.0212	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488