

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 32 天 : 首數尾數

觀念篇

正實數 $x = a \times 10^n$ ，則『 $\log x = n + \log a$ 』，其中：『 $0 \leq \log a < 1, n \in Z$ 』。

整數部分的 n ，稱為『首數』，

正純小數部分 $\log a$ ，稱為『尾數』。

(1) 首數 n 為正，表 m 在小數點前有 $n+1$ 位數

首數 n 為負，表 m 在小數點後有 $|n|-1$ 個零

(2) 尾數必為『正』的『純小數』，

(3) 尾數的性質：

(i) 尾數可以判斷原數的『領導數字』

(ii) 若兩個正數的數字相同，而小數點位置不同，或最後的 0 的個數不同(即二正數的有效數字相同)，則此兩正數的對數值有相同的尾數。

例題篇：鑑往之傾向

1. 已知 $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771$ 。

(1) 請以對數律計算 $\log 1.5$ (不必四捨五入)。(3 分)

(2) 請以對數律計算 $\log (1.5)^{60}$ (不必四捨五入)。(3 分)

(3) 請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分是幾位數？請說明理由。(3 分)

(4) 請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分中，最左邊的數字是幾？請說明理由。(3 分) 【102 數乙】

答：(1) 0.1761 (2) 10.5660 (3) 11 位數 (4) 最左邊的數字為 3

2. 第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元、

依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，

試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？

(1) 10,000 元

(2) 1,000,000 元

(3) 100,000,000 元

(4) 1,000,000,000 元

(5) 1,000,000,000,000 元。

【104 學測】

答：(4)

3. 觀察 2 的次方所形成的等比數列： $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ ，

設其中出現的第一個 13 位數為 2^n ，則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(註： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$)

【101 數乙】

答：40

例題篇：知來之對策

1. 已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ：

- (1) 請以對數律計算 $\log (25)^{16}$ 。(不必四捨五入)
- (2) 請以對數律計算 $\log (6)^{25}$ 。(不必四捨五入)
- (3) 若 $25^{16} + 6^{25}$ 是 m 位正整數且最左邊的數字為 k ，求正整數 m 與 k 之值。

2. 已知 $a = \left(3^{50} + 3^{-50} \right)^3$ ，且 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 7 = 0.8451$ ，

則下列哪些正確？

- (1) 展開後 a 的第一個數字為 5
- (2) 展開後 a 的個位數字是 6
- (3) a 的整數部，有 72 位數
- (4) 展開後 a 的小數點後第 72 位開始不為零
- (5) 展開後 a 的小數點後第 1 個開始不為零的數字為 4。

3. 已知 $\log 2 \approx \log 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ，其中 \approx 表示該值為近似值，請選出正確的選項：

- (1) 不必四捨五入，以對數律計算 $\log 0.6$ 的近似值為 -0.2219
- (2) $\log 1.2 = 2 + \log 0.6$
- (3) $\log (1.2)^{100} = 100 \cdot \log 1.2$
- (4) $(1.2)^{100}$ 的整數部分為 7 位數
- (5) $(1.2)^{100}$ 的整數部分中，最左邊的數字為 8。

4. 令函數 $f(n)$ 的定義為 $\log n$ 的尾數部分，其中 $n > 0$ 且 $n \in \mathbb{R}$ ，請選出正確的選項：
(已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$)

- (1) 若 $f(n) = 0.742$ ，則 n 的首位數字 = 5
- (2) 若 $f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$ ，則 n 的首位數字 = 5
- (3) 可以找到正實數 n ，使得 $f(n) = f(n^2)$
- (4) $f(n)$ 為週期 = 10^k 的週期函數，其中 k 為整數

5. 設 $a = \left(1+3^3\right)\left(1+3^6\right)\left(1+3^9\right)\left(1+3^{12}\right)$ ，則 a 為 _____ 位數。($\log 3 = 0.4771$)

6. x, y, z 為大於 0 的實數，且 $\log_{10} x = \log_2 y = \log_3 z$ ，則 $\log_x \left(y^{20} z^{10} \right)$ 之值最接近下列哪一個整數？

- (1) 8
- (2) 11
- (3) 14
- (4) 17
- (5) 20

7. 設 n 為自然數，已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ ，若 $1, f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$ ，

$3n+4$ 為等差數列，則將 x_{10} 化成小數表示之後，小數點後第幾位開始出現不為零的數字？

8. $\log A = \frac{\log_3 x}{1 - \log_3 x}$, 且 $\log A$ 的首數為 -1 , 則 x 的範圍為 $a < x < b$, 求數 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 等比數列 $(2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{100})$ 中, 共有幾項是 30 位數?
(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4。

10. 設 $\log x$ 的首數是 n , 尾數是 α , 其中 n 是奇數, $\alpha \neq 0$, 則下列敘述哪些正確?

(1) $\log x^3$ 的首數是 $3n$ (2) $\log x^2$ 的尾數是 2α (3) $\log \sqrt{x}$ 的首數是 $\frac{n-1}{2}$

(4) $\log \sqrt{x}$ 的尾數是 $\frac{\alpha}{2}$ (5) $\log \sqrt{x}$ 的尾數是 $\frac{1+\alpha}{2}$ 。



俞克斌數