

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 31 天：等差等比

觀念篇

- 數列與級數： $\{a_n\}$ 為一數列， S_n 為其前 n 項的和，則
$$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$
- 等差數列級數：
 - $a_{n+1} - a_n = d$ (後項減前項，始終為一個定值 d)
 - 等差一般項： $a_n = a_1 + (n-1)d$ 。
 - 前 n 項和： $S_n = (a_1 + a_n) \times \frac{n}{2} = [2a_1 + (n-1)d] \times \frac{n}{2}$ 。
 - 等差中項：若 a, b, c 成等差，則 $b = \frac{a+c}{2}$ 稱為 a, c 的等比中項。
- 等比數列級數：
 - $a_{n+1} \div a_n = r$ (後項除前項，始終為一個定值 r)
 - 等比一般項： $a_n = a_1 r^{n-1}$ 。
 - 首 n 項和： $S_n = \begin{cases} na_1, & \text{if } r=1 \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & \text{if } r \neq 1 \end{cases}$ 。
 - 等比中項：若 a, b, c 成等比，則 $b = \sqrt{ac}$ 稱為 a, c 的等比中項。

例題篇：鑑往之傾向

1. $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^{n+1} (n^2 - 2n)$ ，求 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【87 日社】

答： $2^n (n^2 - 3)$

2. 一個邊長為 n 的大正方形中，共有 n^2 個單位正方形。
如果每一個單位正方形的邊長都恰有一根火柴棒，
而此大正方形共用了 a_n 根火柴棒，那 $a_{n+1} - a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。【86 日社】

答： $4n+4$

3. 假設實數 a_1, a_2, a_3, a_4 是一個等差數列，且滿足 $0 < a_1 < 2$ 及 $a_3 = 4$ 。
若定義 $b_n = 2^{a_n}$ ，則以下哪些選項是對的？

(1) b_1, b_2, b_3, b_4 是一個等比數列。

(2) $b_1 < b_2$ 。

(3) $b_2 > 4$ 。

(4) $b_4 > 32$ 。

(5) $b_2 \times b_4 = 256$ 。

【95學測】

答：(1)(2)(3)(4)(5)

4. 已知 a_1, a_2, a_3 為一等差數列，而 b_1, b_2, b_3 為一等比數列，

且此六數皆為實數。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a_1 < a_2$ 與 $a_2 > a_3$ 可能同時成立

(2) $b_1 < b_2$ 與 $b_2 > b_3$ 可能同時成立

(3) 若 $a_1 + a_2 < 0$ ，則 $a_2 + a_3 < 0$

(4) 若 $b_1 b_2 < 0$ ，則 $b_2 b_3 < 0$

(5) 若 b_1, b_2, b_3 皆為正整數且 $b_1 < b_2$ ，則 b_1 整除 b_2 【97學測】

答：(2)(4)

5. 設 $a_1 = 1$ 且 a_1, a_2, a_3, \dots 為等差數列。請選出正確的選項。

(1) 若 $a_{100} > 0$ ，則 $a_{1000} > 0$

(2) 若 $a_{100} < 0$ ，則 $a_{1000} < 0$

(3) 若 $a_{1000} > 0$ ，則 $a_{100} > 0$

(4) 若 $a_{1000} < 0$ ，則 $a_{100} < 0$

(5) $a_{1000} - a_{10} = 10(a_{100} - a_1)$

【103學測】

答：(2)(3)(5)

6. 設實數組成的數列 $\{a_n\}$ 是公比為 -0.8 的等比數列，

實數組成的數列 $\{b_n\}$ 是首項為 10 的等差數列。

已知 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$ 。請選出正確的選項。

(1) $a_9 \times a_{10} < 0$ (2) $b_{10} > 0$ (3) $b_9 > b_{10}$ (4) $a_9 > a_{10}$ (5) $a_8 > b_8$

【102學測】

答：(1)(3)

7. 設 $(a_{n+1})^2 = \frac{1}{\sqrt{10}} (a_n)^2$ ， n 為正整數，且知 a_n 皆為正。令 $b_n = \log a_n$ ，

則數列 b_1, b_2, b_3, \dots 為

(1) 公差為正的等差數列

(2) 公差為負的等差數列

(3) 公比為正的等比數列

(4) 公比為負的等比數列

(5) 既非等差亦非等比數列

【100學測】

答：(2)

例題篇：知來之對策

1. $\langle a_n \rangle$ 為一正整數數列，設前 n 項總和為 S_n 。

若對所有的正整數 n ， a_n 與 2 的等差中項等於 S_n 與 2 的等比中項，

請問下列哪一個選項等於 a_{2015} ？

- (1) 3057 (2) 4015 (3) 4098 (4) 6062 (5) 8058。

2. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 為每項皆為正數的等差數列，且公差 $d \neq 0$ 。

數列 $\langle b_n \rangle$ 為每項皆為正數的等比數列，且公比 $r \neq 1$ ，請問下列哪些選項正確？

- (1) $\langle 3a_n \rangle$ 為公差是 $3d$ 的等差數列 (2) $\langle a_n + 5 \rangle$ 為公差是 $d + 5$ 的等差數列
(3) $\langle 3b_n \rangle$ 為公比是 $3r$ 的等比數列 (4) $\langle (b_n)^3 \rangle$ 為公比是 r^3 的等比數列
(5) $\langle \log b_n \rangle$ 為公差是 r 的等差數列。

3. 設 $\{a_n\}$ 是公比為 q 的等比數列，其前 n 項積為 T_n 。

並滿足條件 $a_1 > 1$ ， $a_{99}a_{100} - 1 > 0$ ， $\frac{a_{99} - 1}{a_{100} - 1} < 0$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $1 < q$ (2) $0 < q < 1$ (3) $T_{198} < 1$ (4) $a_{99}a_{100} < 1$ (5) $T_{199} < 1$ 。

4. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 是等比數列， a_n 均為正實數，其中 n 為正整數，且 $a_1 = \frac{9}{8}$ ， $a_3 = \frac{1}{8}$ 。

定義 $b_n = \log_2 a_n$ ，則下列敘述何者正確？

- (1) b_1, b_2, b_3, b_4 為等差數列 (2) $b_2 > -1$ (3) $b_2 + b_4 = -6$