

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 30 天：自然級數、分項對消

觀念篇

(1) 自然級數公式： $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 、 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 、 $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(2) 分項對消公式： $\sum_{k=1}^n \frac{m}{k(k+m)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right)$ ， $0 < m$

$$\sum_{k=1}^n \frac{m}{k(k+\ell)(k+m)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+\ell)} - \frac{1}{(k+\ell)(k+m)} \right)$$
， $0 < \ell < m$

例題篇：鑑往之傾向

1. 利用公式 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ 。

可以計算出： $11^3 + 12^3 + 13^3 + \dots + 20^3 =$ _____ 【94 學測】

答：41075

2. 下圖表示長方形垛的疊法：



某水果販將橘子堆成長方形垛，若最底層長邊有 10 個橘子，短邊有 5 個，則此長方形垛最多有 _____ 個橘子。 【84 學測】

答：130

3. 觀察下列 3×3 與 4×4 方格中數字規律，如果在 10×10 的方格上，仿上面規律填入數字，則所填入的 100 個數字之總和為 _____。

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

【88 大學聯考】

答：385

4. 設 $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{49^2}\right) = \frac{a}{b}$ ，其中 a, b 為互質之正整數，
則 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 【84 日大】

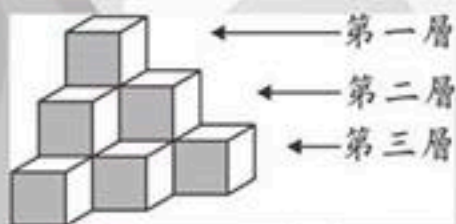
答：74

5. 設 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{32 \cdot 34} = \frac{p}{q}$ ，其中 p, q 為互質之正整數，
則 $q-p = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 【85 大學聯考】

答：157

例題篇：知來之對策

1. 如圖所示，利用相同的正立方體小積木來做堆疊，第一層用1塊積木，第二層用3塊積木，第三層用6塊積木，依此類推，現在手邊若有2015塊小積木，按照前述的堆疊規則，試問最多可以堆出_____層完整的堆疊。



2. 試觀察下列三數列：
 $\langle a_i \rangle = \langle 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \rangle$
 $\langle b_i \rangle = \langle 4, 12, 24, 40, 60, 84, \dots \rangle$
 $\langle c_i \rangle = \langle 5, 13, 25, 41, 61, 85, \dots \rangle$

設以 a_i, b_i, c_i 為三邊的三角形面積為 d_i ，試求 $\sum_{i=1}^{10} d_i = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 等差數列 $\langle a_n \rangle$ 前 n 項和為 S_n ，已知 $a_1 = 10$ ， a_2 為整數，且 $S_n \leq S_4$ 。

若 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，則 $\sum_{n=1}^{10} b_n$ 的值為_____。(化至最簡)