

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 29 天 : 遞迴數列

觀念篇

遞迴關係式：描述相鄰項或相鄰幾項之間關係的式

(1) 累加型：相鄰項之間關係以加法連結，

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = a_n + f(n) \end{cases} \xrightarrow{\text{轉化}} a_n = c + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

(2) 累乘型：相鄰項之間關係以乘法連結，

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = a_n \times f(n) \end{cases} \xrightarrow{\text{轉化}} a_n = c \times \prod_{k=1}^{n-1} f(k)$$

(3) 綜合型：相鄰項或相鄰幾項之間關係以加法與乘法連結，

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = \alpha a_n + \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{轉化}} \begin{cases} (a_{n+1} - q) = \alpha \cdot (a_n - q) \\ -\alpha q + q = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+2} = \alpha \cdot a_{n+1} + \beta \cdot a_n \end{cases} \xrightarrow{\text{轉化}} \begin{cases} (a_{n+2} - q \cdot a_{n+1}) = p \cdot (a_{n+1} - q \cdot a_n) \\ p + q = \alpha \\ -pq = \beta \end{cases}$$

例題篇：鑑往之傾向

例題篇：知來之對策

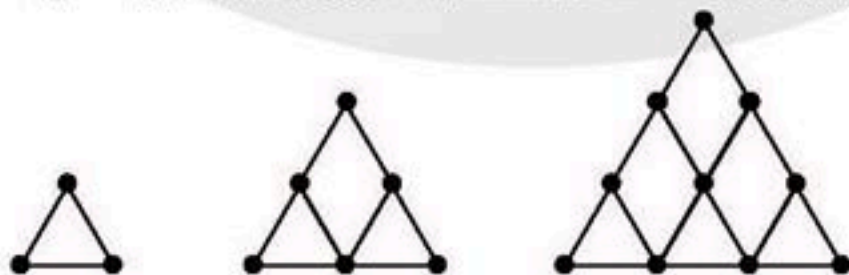
1. 已知數列 $\{a_n\}$ 的首項 $a_1 = 1$ ，若 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是首項 $(a_2 - a_1)$ 為 3 且公差為 2 的等差數列，設 $\{a_n\}$ 的一般項為 $an^2 + bn + c$ ，則 $a + 3b + 5c =$ _____。

2. 用長度 1 的木棒，依照下列規則排成正三角形，如下圖 1 至 3：

在圖 1 中，用 3 根木棒排成邊長 1 的正三角形，

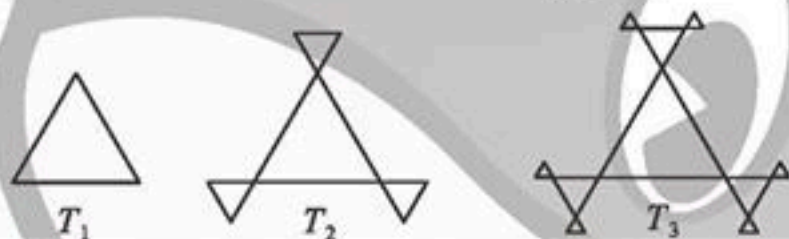
在圖 2 中，用 8 根木棒排成邊長 2 的正三角形，

在圖 3 中，用 15 根木棒排成邊長 3 的正三角形，...，依此類推，請選出正確選項。



- (1) 圖 6 用了 48 根木棒
 (2) 圖 10 與圖 5 相差了 50 根木棒
 (3) 圖 20 用了 400 根木棒
 (4) 圖 1 到圖 10 總共用了 495 根木棒
 (5) 圖 1 到圖 n 總共用了 $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ 根木棒

3. 設 T_1 為邊長等於 1 的正三角形； T_2 為一個以 T_1 的三個頂點往外作出三個邊長為原正三角形邊長 $\frac{1}{3}$ 的正三角形（我們稱之為第二層的正三角形）所形成的圖形； T_3 為一個由 T_2 第二層三角形未連接的頂點往外作出邊長為第二層三角形邊長 $\frac{1}{3}$ 的正三角形（我們稱之為第三層的正三角形）所形成的圖形；依此類推……，可得到 T_1, T_2, T_3, \dots 的圖形（如圖所示），令 a_n 表 T_n 的周長，若 $n < \sum_{k=1}^{100} a_k < n+1$ ，則正整數 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



俞克斌數