

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

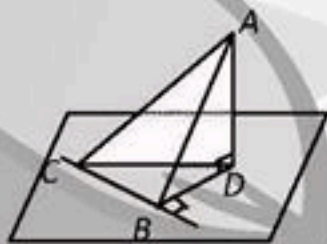
倒數 9 天：空間概念

觀念篇

三垂線定理：

空間中，如右圖，

$$\overline{AD} \perp \overline{BD} \text{ 且 } \overline{BD} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC}$$

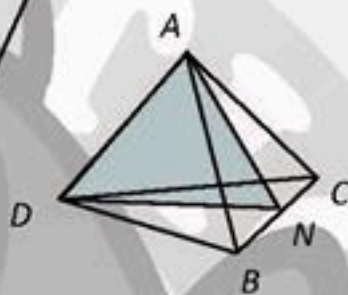


兩面夾角：

空間中，如右圖，

在 \overline{BC} 上取適當的點 N ，使 $\overline{AN} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{DN} \perp \overline{BC}$ 。

則以 \overline{AN} 、 \overline{DN} 之夾角作為兩平面 ABC 、 DBC 之夾角。



正多面體：

(1) 正方體（正六面體）之核長為 a ，則

表面積為 $6a^2$ ，體積為 a^3 ，內切球半徑為 $\frac{a}{2}$ ，外接球半徑為 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

(2) 正四面體之核長為 a ，則

表面積為 $\sqrt{3}a^2$ ，高為 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，體積為 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

內切球半徑 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$ ，外接球半徑為 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$ ，

並斜二核最短距離為 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ，相鄰二面之夾角為 $\cos^{-1} \frac{1}{3}$ 。

(3) 正八面體之核長為 a ，則

表面積為 $2\sqrt{3}a^2$ ，對角線長為 $\sqrt{2}a$ ，體積為 $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

內切球半徑為 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ ，外接球半徑為 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

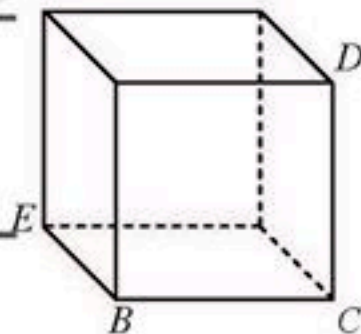
相鄰二面之夾角為 $\cos^{-1} \left(\frac{-1}{3} \right)$ （這是反三角函數，意義是『角度』）

例題篇：鑑往之傾向

1. 空間中一長方體如圖所示，其中 $ABCD$ 為正方形，

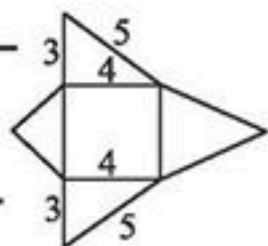
\overline{BE} 為長方體的一邊。已知 $\cot \angle AEB = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ，

則 $\cot \angle CED = \underline{\hspace{2cm}}$ 【100 學測】



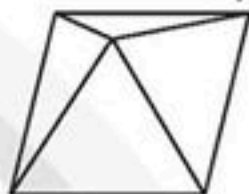
答： $\frac{7}{5}$

2. 有一底面為正方形的四角錐，其展開圖如圖所示，其中兩側面的三角形邊長為3、4、5，則此角錐的體積為_____。(化為最簡根式)【104學測】



答： $\frac{16\sqrt{5}}{3}$

3. 在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 θ 的正切值 $\tan\theta$ 。若一金字塔（底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$ ，如圖。則相鄰斜面的夾角的餘弦函數的絕對值為_____。(化為最簡分數)【104學測】



答： $\frac{25}{29}$

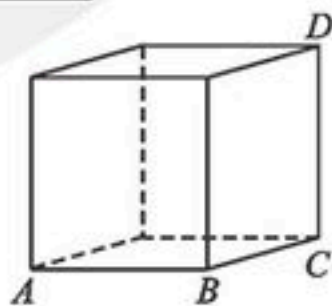
4. 坐標空間中，在 xy 平面上置有三個半徑為1的球兩兩相切，設其球心分別為 A 、 B 、 C 。今將第四個半徑為1的球置於這三個球的上方，且與這三個球都相切，並保持穩定。設第四個球的球心為 P ，試問下列哪些選項是正確的？
 (1) 點 A 、 B 、 C 所在的平面和 xy 平面平行
 (2) 三角形 ABC 是一個正三角形
 (3) 三角形 PAB 有一邊長為 $\sqrt{2}$
 (4) 點 P 到直線 AB 的距離為 $\sqrt{3}$
 (5) 點 P 到 xy 平面的距離為 $1+\sqrt{3}$ 【96學測】

答： (1)(2)(4)

5. 正四面體的四個頂點落在以原點 $O(0, 0, 0)$ 為球心、半徑1的球面上，已知一頂點 P 的坐標為 $(0, 0, 1)$ ，另一頂點 Q 的坐標為 (a, b, c) 。下列選項有哪些必定是正確的？
 (1) \vec{OP} 與 \vec{OQ} 的夾角 120°
 (2) $a^2 + b^2 > c^2$
 (3) $ab > 0$
 (4) $c < 0$ 【93指考甲】

答： (2)(4)

6. 在右圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A 、 C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B 、 D 前進，且在1秒後分別同時到達 B 、 D 。請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項：
 (1) 兩質點的距離固定不變 (2) 兩質點的距離越來越小
 (3) 兩質點的距離越來越大 (4) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小



(5) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大。

【106 學測】

答：(4)

7. 令 $A(5, 0, 12)$ 、 $B(-5, 0, 12)$ 為坐標空間中之兩點，

且令 P 為 xy 平面上滿足 $\overline{PA} = \overline{PB} = 13$ 的點。請問下列哪一個選項中的點可能為 P ？

(1) $(5, 0, 0)$ (2) $(5, 5, 0)$ (3) $(0, 12, 0)$ (4) $(0, 0, 0)$ (5) $(0, 0, 24)$ 【103 學測】

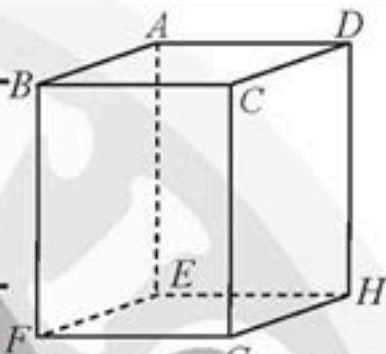
答：(4)

8. 如右圖所示， $ABCD-EFGH$ 為一長方體。

若平面 BDG 上一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + a\overrightarrow{AE}$ ，

則實數 $a =$ _____。(化為最簡分數) 【105 學測】

答： $\frac{4}{3}$

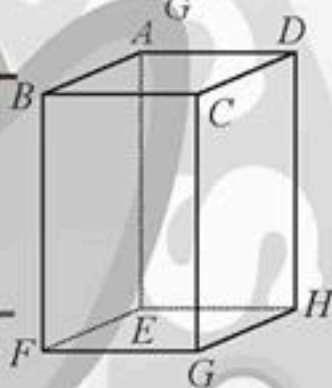


9. 如圖，設 $ABCD-EFGH$ 為空間中長、寬、高分別為 2、3、5 的長方體。

已知 $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{AD} = \overline{BC} = 3$ ，且 $\overline{DH} = 5$ 。

則內積 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ 之值為 _____。 【103 數甲】

答：9



10. 如圖所示，正立方體 $ABCD-EFGH$ 的稜長等於 2 (即 $\overline{AB} = 2$)。

K 為正方形 $ABCD$ 的中心， M 、 N 分別為線段 BF 、 EF 的中點。

試問下列哪些選項是正確的？

(1) $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

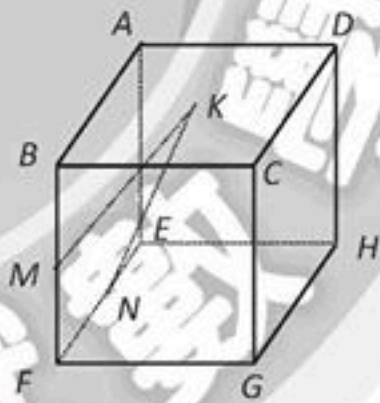
(2) (內積) $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$

(3) $\overline{KM} = 3$

(4) $\triangle KMN$ 為一直角三角形

(5) $\triangle KMN$ 之面積為 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【98 學測】

答：(1)(4)



11. 空間中，以 \overline{AB} 為共同邊的兩正方形 $ABCD$ 、 $ABEF$ ，其邊長皆為 4。

知內積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = 11$ ，則 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} =$ _____。

【101 數甲】

答：27

12. 空間中有一四面體 $ABCD$ ，假設 \overrightarrow{AD} 分別與 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{AC} 垂直，請選出正確的選項：

(1) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overline{DA}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

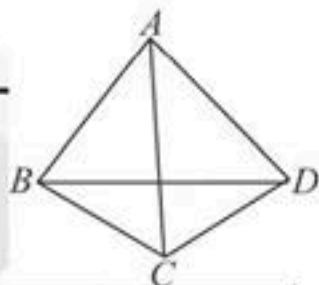
- (2)若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角
 (3)若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角
 (4)若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角
 (5)若 $\overline{AB} < \overline{DA}$ 且 $\overline{AC} < \overline{DA}$ ，則 $\angle BDC$ 是銳角。

【106學測】

答：(3)(5)

例題篇：知來之對策

1. 如右圖，四面體 $ABCD$ 中，底面 $\triangle BCD$ 為邊長6的正三角形，而 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 9$ ，則直線 AB 與直線 CD 的距離為_____。



2. 設 A, B, C, D 為空間中四個相異點， \overline{CD} 垂直平面 ABC ，已知 $\overline{AB} = 13, \overline{BC} = 15, \overline{CD} = 10$ ， $\triangle ABC$ 為銳角三角形， $\sin \angle BAC = \frac{12}{13}$ ， $\cos \angle ACB = \frac{3}{5}$ ，試求四面體 $D-ABC$ 體積為_____。(四面體體積 $= \frac{1}{3}$ 底面積 \times 高)

3. 在空間中，以 \overline{AB} 為共同邊的正三角形 ABC 及正方形 $ABDE$ ，若假設每邊長皆為6，已知內積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 12$ ，則 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。