

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 8 天：空間中的直線

### 觀念篇

過點  $(x_0, y_0, z_0)$ ，且方向向量為  $(a, b, c)$  的直線

$$(1) \text{ 參數式：} \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in R$$

$$(2) \text{ 點向式：} \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \text{ 可轉為參數式}$$

$$(3) \text{ 兩面式：} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}, \text{ 可轉為參數式}$$

### 例題篇：鑑往之傾向

1. 在空間中，下列選項中的方程組，何者圖形為一直線？

(A)  $3x + 2y + z = 1, 6x + 4y + 2z = 5$  (B)  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-5}{3}$

(C)  $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = 3 \end{cases}$ ， $t$  為任意實數 (D)  $2x + y = 1$

(E)  $x + y - 2z = 0, x - 2y + z = 1, 2x - y - z = 1$ 。

【86 日社】

答：(B)(C)(E)

2. 假設坐標空間中三相異平面  $E_1, E_2, E_3$  皆通過  $(-1, 2, 0)$  與  $(3, 0, 2)$  兩點，試問以下哪些點也同時在此三平面上？

(1)  $(2, 2, 2)$  (2)  $(1, 1, 1)$  (3)  $(4, -2, 2)$  (4)  $(-2, 4, 0)$  (5)  $(-5, -4, -2)$

【94 學測】

答：(2)

3. 李探長為了找尋槍手的可能發射位置，

他設定一空間坐標，先從  $A(0, 0, 2)$  朝向  $B(5, 8, 3)$  發射一固定雷射光束，

接著又從點  $P(0, 7, a)$  沿平行於  $X$  軸方向發射另一雷射光束，

試問當  $a$  為 \_\_\_\_\_ 時，兩雷射光束會相交？

【93 數乙】

答： $\frac{23}{8}$

4. 座標空間中一質點自點  $P(1,1,1)$  沿著方向  $\vec{a} = (1,2,2)$  等速直線前進，經過 5 秒後剛好到達平面  $x-y+3z=28$  上。

立即轉向沿著方向  $\vec{b} = (-2,2,-1)$  依同樣的速率等速直線前進。  
請問再經過幾秒此質點會剛好到達平面  $x=2$  上？

- (1) 1 秒 (2) 2 (3) 3 秒 (4) 4 秒 (5) 永遠不會到

【105 學測】

答：(2)

5. 坐標空間中有四點  $A(2,0,0)$ 、 $B(3,4,2)$ 、 $C(-2,4,0)$  與  $D(-1,3,1)$ 。

若點  $P$  在直線  $CD$  上變動，則內積  $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$  之最小可能值為\_\_\_\_\_。  
(化為最簡分數)

【103 學測】

答： $\frac{5}{4}$

6. 下列各直線中，請選出和  $z$  軸互為歪斜線的選項。

- (1)  $L_1 : \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$  (2)  $L_2 : \begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$  (3)  $L_3 : \begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$   
(4)  $L_4 : \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$  (5)  $L_5 : \begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$

【105 學測】

答：(3)(5)

7. 坐標空間中有三直線

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}, L_2 : \begin{cases} x-2y+2z=-4 \\ x+y-4z=5 \end{cases}, L_3 : \begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}, t \text{ 為實數。}$$

請選出正確的選項：

- (1)  $L_1$  與  $L_2$  的方向向量互相垂直 (2)  $L_1$  與  $L_3$  的方向向量互相垂直  
(3) 有一個平面同時包含  $L_1$  與  $L_2$  (4) 有一個平面同時包含  $L_1$  與  $L_3$   
(5) 有一個平面同時包含  $L_2$  與  $L_3$ 。

【106 學測】

答：(2)(3)(4)

8. 設坐標空間中三條直線  $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$  的方程式分別為

$$L_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+4}{8}; L_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}; L_3 : \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}。$$

試問下列哪些選項是正確的？

- (1)  $L_1$  與  $L_2$  相交 (2)  $L_2$  與  $L_3$  平行  
(3) 點  $P(0,-3,-4)$  與  $Q(0,0,0)$  的距離即為點  $P$  到  $L_3$  的最短距離

- (4) 直線  $L : \begin{cases} x=0 \\ \frac{y+3}{4} = \frac{z+4}{-3} \end{cases}$  與直線  $L_1$ 、 $L_2$  皆垂直

答：(1)(2)(4)(5)

**例題篇：知來之對策**1. 設  $A(-2, 1)$ 、 $B(3, 4)$ ，若  $P(x, y)$  在  $\overline{AB}$  上移動，下列何者正確？

(A)  $2x+3y+5$  之最大值 = 23

(B)  $2x+3y+5$  之最小值 = 4

(C)  $x^2 - 2y^2 - 1$  之最大值 = 1

(D)  $x^2 - 2y^2 - 1$  之最小值 =  $-\frac{249}{7}$

(E)  $\overline{AB}$  的參數式可表示成 
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}t \\ y = 2+t \end{cases}, -1 \leq t \leq 2$$

2. 設有一實心球，其球面方程式現位於  $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 4$  處，朝  $xy$  平面飛去，撞到點  $(3, p, 0)$  反射出去，若反射之後球心會通過點  $(5, 0, m)$ ，則數對  $(p, m) =$  \_\_\_\_\_。3. 老師演練一道試題為空間中一條直線  $L$  的兩種寫法，

一種是「兩面式」，一種是「對稱比例式」，但試題被污墨弄髒，

只看見 
$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y \end{cases} \text{ 及 } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{\quad}$$
，

於是老師補上係數得 
$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+pz+q=0 \end{cases} \text{ 及 } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+s}{r}$$
，

則  $p+q+r+s =$  \_\_\_\_\_。4. 若方程組  $G: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$  有一組解為  $(-2, 1, 2)$ ，且方程組  $G$  表示相異三平面的方程組，

若另一方程組  $H: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$  有另一組解為  $(3, 2, 1)$ ，

則下列哪些亦是方程組  $H$  的解？(1)  $(0, 0, 0)$  (2)  $(1, 3, 3)$  (3)  $(5, 1, -1)$  (4)  $(-1, 3, 5)$ 5. 設空間中二直線  $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z+3$  與  $L_2: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+2}{-1}$ ，若直線  $L$  過  $P(1, 2, -1)$  且與  $L_1, L_2$  分別交於  $A, B$  兩點，則  $\overline{AB}$  長為(1)  $\sqrt{2}$  (2) 2 (3)  $\sqrt{5}$  (4) 3 (5)  $\sqrt{6}$

6. 在中午 12 點的時候，陽光垂直照射在地面上，小彬把地面看成  $xy$  平面，並沿著三直線

$$L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-8}{8}, \quad L_2: \frac{x-5}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-9}{9}, \quad L_3: \frac{x-2}{3} = \frac{y-9}{-3} = \frac{z-7}{-7}$$

各發射一冲天炮，則冲天炮的軌跡，在地面上的投影圖形可為下列何者？

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

(5) 