

俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 7 天：空間中的平面

觀念篇

過點 (x_0, y_0, z_0) ，且法向量為 (a, b, c) 的平面

(1) 點法式： $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

一般式： $ax+by+cz+d=0$

(2) 截距式： $\frac{x}{h}+\frac{y}{k}+\frac{z}{l}=1$

(3) 過兩平面 E_1 、 E_2 之交線的平面族可設作： $[E_1+kE_2=0]$

例題篇：鑑往之傾向

1. 設 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別為 $A(-2, 7, 15)$ 、 $B(1, 16, 3)$ 、 $C(10, 7, 3)$ 。

(1) 試求通過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式。

(2) 試求 $\triangle ABC$ 的外心坐標。

【96 數甲】

答：(1) $x+y+z-20=0$ ；(2) $(3, 9, 8)$

2. 坐標空間中 xy 平面上有一正方形。

其頂點為 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(8, 0, 0)$ 、 $B(8, 8, 0)$ 、 $C(0, 8, 0)$ 。

另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O, A, B, C 四點的距離皆等於 6。

若 $x+bt+cz=d$ 為通過 A, B, P 三點的平面，則 $(b, c, d)=$ _____。

【98 學測】

答：(0, 2, 8)

3. 設 $O(0, 0, 0)$ 為坐標空間中某長方體的一個頂點。

且知 $(2, 2, 1)$ 、 $(2, -1, -2)$ 、 $(3, -6, 6)$ 為此長方體中與 O 相鄰的三頂點。

若平面 $E: x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分。

其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體，則 $(b, c, d)=$ _____。【97 學測】

答：(-2, 2, 9)

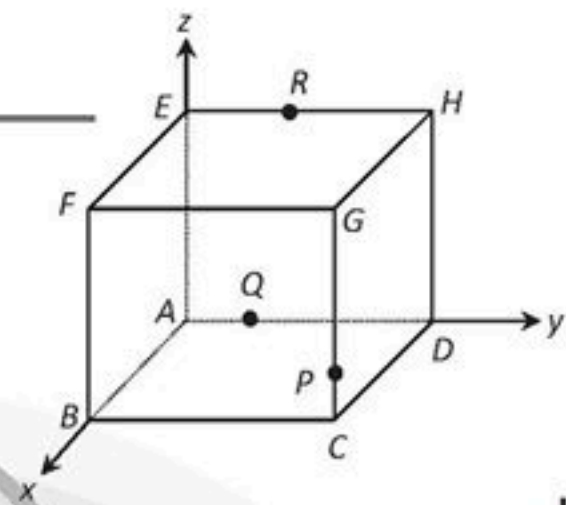
4. $H: x-y+z=2$ 為坐標空間中一平面， L 為平面 H 上的一直線。

已知點 $P(2, 1, 1)$ 為 L 上距離原點 O 最近的點。

則 $(2, \underline{\quad}, \underline{\quad})$ 為 L 的方向向量。【100 學測】

答：-1, -3

5. 如圖，在坐標空間中，
 A, B, C, D, E, F, G, H 為正立方體的八個頂點，
 已知其中四個點的坐標
 $A(0,0,0)$ 、 $B(6,0,0)$ 、 $D(0,6,0)$ 及 $E(0,0,6)$ ，
 P 在線段 \overline{CG} 上且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$ ，
 R 在線段 \overline{EH} 上且 $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$ ，
 Q 在線段 \overline{AD} 上。
 若空間中通過 P, Q, R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，
 則點 Q 的 y 坐標為_____。(化成最簡分數)

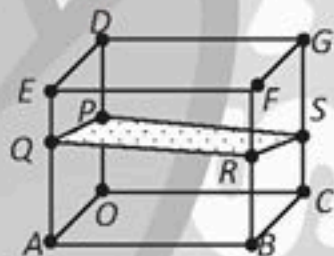


【102 學測】

答： $\frac{15}{11}$

例題篇：知來之對策

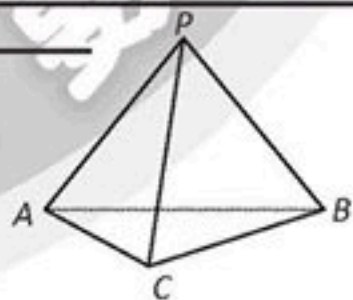
1. 如圖，在空間坐標中，正立方體 $OABC-DEFG$ 邊長為 6，其中 O 為原點，
 已知 P, Q, R, S 在同一平面上，
 且 $\overline{DP}:\overline{PO}=1:1$ ， $\overline{EQ}:\overline{QA}=1:2$ ， $\overline{GS}:\overline{SC}=2:1$ ，
 則下列敘述何者正確？
 (1) $\overline{FR}:\overline{RB}=1:1$
 (2) 若平面 E 與 xy 平面的夾角為 θ ，則 $\sin \theta > \frac{1}{5}$
 (3) $\angle QPS$ 為鈍角
 (4) 四邊形 $PQRS$ 為平行四邊形
 (5) \overrightarrow{EG} 在 $PQRS$ 平面上的正射影為 \overrightarrow{QS} ，且正射影長為 $2\sqrt{19}$



2. 空間坐標中，已知 $A(2,2,1)$ 、 $B(-2,1,-2)$ 、 $C(-1,-2,2)$ 為球面 S 上三點，
 且球面 S 的球心為原點，設包含 A, B, C 的平面為 E ，
 已知平行平面 E 且與 S 相切的平面有兩個，
 其中距離平面 E 較接近的平面方程式為 $x + my + nz = k$ ，
 則與 $|m+n+k|$ 之值最接近的整數為_____。($\sqrt{3} \approx 1.732$)

3. 如右圖：四面體 $PABC$ 中， $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{AB}$ ，又 $\overline{PC} \perp \overline{AC}$ ，平面 APB 與平面 APC 所夾
 的二面角為 θ ，則 $\cos \theta =$ _____。

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (5) $\frac{\sqrt{6}}{3}$



4. 空間中，正六面體 Ω 的其中四個頂點為 $(0,0,0)$ 、 $(a,0,0)$ 、 $(0,a,0)$ 、 $(0,0,a)$ ，
 另有一平面 E ，且 $(b,0,0)$ 、 $(0,b,0)$ 、 $(0,0,b)$ 為平面 E 上的點，
 今投擲一個公正的六面骰子兩次，令 $a =$ 第一次擲出的點數， $b =$ 第二次擲出的點數，
 則 Ω 與 E 不相交的機率為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{12}$ (5) $\frac{1}{18}$ 。

答：(4)

5. 空間中已知平面 E 通過點 $(1, 4, 1)$ 且與三座標軸正向所圍四面體的體積最小時，平面 E 為 $ax + by + cz = 1$ 。
若另一平面 F 也通過點 $(1, 4, 1)$ 且與三座標軸正向所截線段長的和最小時，平面 F 為 $dx + ey + fz = 1$ 。
則 $\frac{a \times b \times c}{d \times e \times f} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

答： $\frac{32}{27}$

6. 空間中，面積為 15 的四邊形 $ABCD$ ，若 $A(2, 8, 4)$ 、 $B(4, 10, 4)$ 、 $C(5, 13, 0)$ 、 $D(a, b, c)$ ，其中 D 點在平面 $2x - y - z + 6 = 0$ 上。若符合條件的 D 點僅有一個。請選出正確的選項。
- (1) A 、 B 、 C 三點所在的平面為 $2x - 2y - z + 16 = 0$
 (2) $\triangle ABC$ 的面積為 12
 (3) $0 < a \leq 3$
 (4) $3 < b \leq 6$
 (5) $3 < c \leq 6$ 。

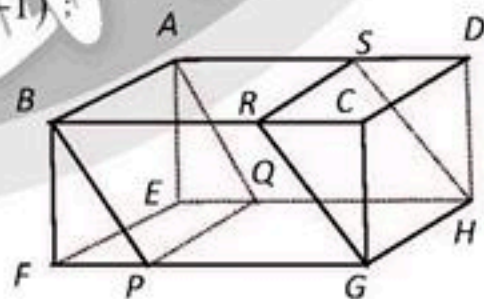
答：(1)(3)

7. 空間中有四點 $A(1, 5, 3)$ 、 $B(0, 2, 3)$ 、 $C(4, 1, 0)$ 、 $D(0, 0, 0)$ ，則下列敘述哪些是正確的？
- (1) A 、 B 、 C 所有平面之法向量可為 $(9, -3, 13)$
 (2) $\angle BAC < 60^\circ$
 (3) 若 a, b 為實數，且 $D(3, a, b)$ 與 A 、 B 、 C 共平面，則點 $(0, 0, 0)$ 到平面 $ax + by - 12 = 0$ 的最大距離為 $2\sqrt{178}$
 (4) 四面體 $O-ABC$ 的體積為 33
 (5) 直線 OA 與直線 BC 之最短距離為 $\frac{11}{\sqrt{90}}$

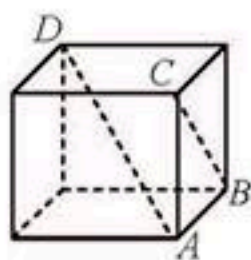
答：(1)(3)(5)

9. 如圖， $ABCD-EFGH$ 為空間中長方體，已知 $A(5, -1, 5)$ 、 $C(5, -4, -1)$ 、 $H(0, 0, 0)$ 、 $P(5, 2, -1)$ ； P 、 Q 、 R 、 S 分別在長方體的邊上，且 $\overline{AD} = 3\overline{SD}$ 、 $\overline{BC} = 3\overline{RC}$ 、 $\overline{HE} = 3\overline{QE}$ 、 $\overline{GF} = 3\overline{PF}$ 。

- (1) 設 $\overrightarrow{HG} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{HE} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{HD} = \vec{c}$ ，試求 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 。(5分)
 (2) 試求 $HGRS$ 平面的方程式。(4分)
 (3) 試求 $ABPQ$ 平面與 $HGRS$ 平面的距離。(3分)



10. 如右圖 A 、 B 、 C 、 D 為正立方體的四個頂點，
若此正立方體的稜長為 1，求兩歪斜線 AD 與 BC 的距離為_____。



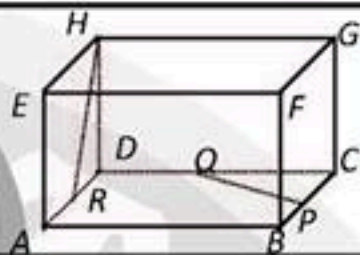
答： $\frac{\sqrt{6}}{6}$

11. 如圖，在邊長為 6 的正立方體 $ABCD-EFGH$ 中，

P 、 Q 分別為 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的中點， $\overline{AR} = \frac{1}{3}\overline{AD}$ 。

則直線 RH 與直線 PQ 的最短距離為_____。

(分母須化為最簡根式)



答： $\frac{21}{\sqrt{22}}$

俞克斌數