俞克斌杯杯 的 數學
指考 百日維新

俞克斌老師編寫

倒數 6 天：行列式與面積體積

觀念篇

(1) $\overrightarrow{A}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{B}=(x_2,y_2)$

則$\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$所張拓出之平行四邊形面積 $=\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right\|$

(2) $\overrightarrow{A}=(x_1,y_1,z_1)$、$\overrightarrow{B}=(x_2,y_2,z_2)$、$\overrightarrow{C}=(x_3,y_3,z_3)$

則$\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$所張拓出之平行四邊形面積 $=\left|\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right|$

則$\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$、$\overrightarrow{C}$所張拓出之平行六面體體積 $=\left|\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{C}\right|=\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|$

例題篇：鑑往之傾向

1. 坐標平面上有一個平行四邊形$ABCD$，其中點A的坐標為$(2,1)$，
點B的坐標為$(8,2)$，點C在第一象限且知其x坐標為12。
若平行四邊形$ABCD$的面積等於38平方單位，則點D的坐標為________【99學測】

答：$(6,8)$

2. 座標平面上有一面積為 40 的凸四邊形，
其四個頂點的座標按逆時針方向依序為$(0,0)$、$(4,2)$、$(x,2x)$、$(2,6)$，
則 $x=$ ________【100 數乙】

答：10

3. 座標平面上有三點$O(0,0)$、$A(11,2)$、$B(23,18)$。直線L通過A點且與線段$\overline{AB}$垂直。
(1) 求直線L上與A點距離為 5 的兩點C、D之座標。
(2) 求ΔOCD的面積。【103 數乙】

答：(1) $(15,-1)$，$(7,5)$ (2) 41

4. 座標平面上O為原點，設$\overrightarrow{u}=(1,2)$、$\overrightarrow{v}=(3,4)$。
令Ω為滿足$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$的所有點$P$所形成的區域，其中$\frac{1}{2}\le x\le 1$、$-3\le y\le\frac{1}{2}$，
則Ω的面積為________平方單位。(化成最簡分數)【105 學測】

答：$\dfrac{7}{2}$

5. 給定向量$\overrightarrow{u}=(2,2,1)$，請選出正確的選項：
(1) 可找到向量$\overrightarrow{v}$使得$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{2}$
(2) 可找到向量$\overrightarrow{v}$使得$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(1,3,4)$
(3) 若非零向量$\overrightarrow{v}$滿足$\left|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right|=2\left|\overrightarrow{v}\right|$，則$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$
(4) 若非零向量$\overrightarrow{v}$滿足$\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|=3\left|\overrightarrow{v}\right|$，則$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$
(5) 若向量$\overrightarrow{v}$滿足$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$且$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$，則$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$　【103 數甲】

答：(1)(4)(5)

6. 考慮向量$\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,1)$，其中$a^2+b^2=c^2+d^2=1$。
請選出正確的選項。
(1) 向量$\overrightarrow{v}$與z軸正向的夾角恆為定值(與c、d之值無關)
(2) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$的最大值為$\sqrt{2}$
(3) $\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$夾角的最大值為135°
(4) $ad-bc$的值可能為$\dfrac{5}{4}$
(5) $\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|$的最大值為$\sqrt{2}$　【102 數甲】

答：(1)(3)(5)

7. 空間中有三向量$\overrightarrow{OA}=(2,-1,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-3,1,2)$，$\overrightarrow{OC}=(1,2,1)$，
則由此三向量所張的平行六面體的體積是________。　【82 日社】

8. 空間中$\overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3)$，$\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3)$，$\overrightarrow{w}=(w_1,w_2,w_3)$，

所張平行六面體的體積為$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$的絕對值。

今已知$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$三向量所張平行六面體的體積為5，
則(1) $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$三向量所張平行六面體的體積為________。
則(2) $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$，$-\overrightarrow{b}$，$4\overrightarrow{c}$三向量所張平行六面體的體積為________。
【85 學測】

例題篇：知來之對策

1. 設a、b為正數，已知直線方程式$L_1：x+y=0$、$L_2：x+y=a$、$L_3：2x-y=0$、$L_4：2x-y=b$。若此四條直線所圍成的平行四邊形面積為$\sqrt{10}$，則此平行四邊形周長的最小值為下列哪一選項？
(1)$\frac{\sqrt{10}}{3}$　(2)$\frac{2\sqrt{10}}{3}$　(3)$\frac{4\sqrt{10}}{3}$　(4)$\frac{2\sqrt{30}}{3}$　(5)$\frac{4\sqrt{30}}{3}$。

2. 已知$t>0$且三個向量分別為$\vec{a}=(1,t)$、$\vec{b}=(4,2)$、$\vec{c}=(4,4t)$，若三個向量的長度分別為$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$、$|\vec{c}|$，且依序成一等比數列，則$\vec{a}-\vec{b}$與$\vec{a}-\vec{c}$所張成的平行四邊形面積為________。

3. 設$\vec{a}=(2,-1,1)$，$\vec{b}$、$\vec{c}$兩向量的外積$\vec{b}\times\vec{c}=(3,-5,7)$，
則以$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$為相鄰三稜的平行六面體體積=________。

4. 空間中三個向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，
若$|\vec{a}|=10$，$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{d}$，$\vec{d}$和$\vec{a}$的夾角為$60°$，$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=60$，
則$|\vec{d}|$之值為何？
(1) 6　(2) $6\sqrt{3}$　(3) 10　(4) $10\sqrt{3}$　(5) 12

5. 空間中四點，$A(0,0,0)$、$B(\sin\theta,\sqrt{3},0)$、$C(\cos\theta,1,-2)$、$D(0,1,-1)$，
已知由$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$所張平行六面體之體積為2，且θ為銳角，求θ=________。
(1) $30°$　(2) $60°$　(3) $75°$　(4) $45°$　(5) $15°$

6. 空間中三向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，
已知三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所張成的平行六面體體積之值為$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right\|$。
設a,b,c,x,y,z皆為實數，若$a^2+b^2+c^2=4$、$x^2+y^2+z^2=25$，
求三階行列式$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$的最大值為________。