

# 俞克斌杯杯 的 數學 指考 百日維新

俞克斌老師編寫

## 倒數 5 天：行列式與克拉瑪法則

### 觀念篇

(A) 二元一次方程組：
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

令  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 、 $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 、 $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

當  $\Delta \begin{cases} \neq 0 & \text{恰一組解} \left( \frac{-\Delta_x}{\Delta}, \frac{-\Delta_y}{\Delta} \right) \\ = 0 & \begin{cases} \Delta_x = 0 \text{ 且 } \Delta_y = 0 & \text{無限多解} \\ \Delta_x \neq 0 \text{ 或 } \Delta_y \neq 0 & \text{無解} \end{cases} \end{cases}$

- (1) 恰有一解：兩相異直線交於一點
- (2) 無限多解：兩直線完全重合
- (3) 無解：兩直線平行

(B) 三元一次方程組：
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$
，令  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 、 $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 、 $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

當  $\Delta \begin{cases} \neq 0 & \text{恰一組解} \left( \frac{-\Delta_x}{\Delta}, \frac{-\Delta_y}{\Delta}, \frac{-\Delta_z}{\Delta} \right) \\ = 0 & \begin{cases} \Delta_x = 0 \text{ 且 } \Delta_y = 0 \text{ 且 } \Delta_z = 0 & \text{無限多解 或 無解} \\ \Delta_x \neq 0 \text{ 或 } \Delta_y \neq 0 \text{ 或 } \Delta_z \neq 0 & \text{無解} \end{cases} \end{cases}$

- (1) 恰有一解：三相異平面交於一點
- (2) 無限多解：三平面完全重合、  
兩平面重合與第三面交於一線、  
三相異平面交於一線
- (3) 無解：三平面兩重合與第三面平行、  
三平面完全平行、  
兩平面平行與第三面各交於一線（此二線平行）、

### 例題篇：鑑往之傾向

1. 設  $a, b, c$  為實數，下列有關線性方程組 
$$\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$$
 的敘述

哪些是正確的？

- (1) 若此線性方程組有解，則必定恰有一組解  
 (2) 若此線性方程組有解，則  $11a-3b \neq 7$   
 (3) 若此線性方程組有解，則  $c=14$   
 (4) 若此線性方程組無解，則  $11a-3b=7$   
 (5) 若此線性方程組無解，則  $c \neq 14$

【98 學測】

答：(4)(5)

2. 設  $c$  為實數， $E_1, E_2, E_3$  皆為坐標空間中的平面，其方程式如下：

$$E_1: cx+y=c, E_2: cy+z=0, E_3: x+cz=1$$

已知  $E_1, E_2, E_3$  有一個交點的  $z$  坐標為 1，請選出正確的選項。

- (1)  $(1, 0, 0)$  是  $E_1, E_2, E_3$  的一個交點  
 (2)  $E_1, E_2, E_3$  有無窮多個交點  
 (3)  $E_1, E_2, E_3$  中一定有兩個平面重合  
 (4)  $c=1$   
 (5)  $E_1, E_2, E_3$  有一個交點的  $z$  坐標為 2

【102 數甲】

答：(1)(2)(5)

3. 當  $n$  為正整數時，令  $x=a_n, y=b_n, z=c_n$  為三元一次聯立方程組 
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2nx+ny+3z=8n \end{cases}$$
 之唯一解，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$  \_\_\_\_\_ 【99 數甲】

答：-2

### 例題篇：知來之對策

1. 已知三元一次方程組 
$$\begin{cases} kx+y+z=k-3 \\ x+ky+z=-2 \\ x+y+kz=-2 \end{cases}$$
，其幾何意義代表三平面的關係，

則下列哪些選項是正確的？

- (A) 當  $k=2$  時，表三平面交於一點  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 2\right)$   
 (B) 當  $k=1$  時，表三平面重合  
 (C) 當  $k=-2$  時，表三平面交於一線  
 (D) 當  $k=-2$  時，表三平面兩兩交成一線且三線相互平行

2. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為實數，已知一次方程組

$$\begin{cases} 2x+5y+2az=b \\ x+ay+z=c \\ y+az=d \end{cases}$$

的解的圖形是空間坐標中包含點  $(1, -1, 0)$  的一條直線。

則  $a$  的所有可能解的和為 \_\_\_\_\_。(化為最簡分數)

