大學入學考試中心
108 學年度指定科目考試數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動。每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金 400 元；若出現一正一反可得獎金 800 元；若出現兩個正面可得獎金 800 元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會）。試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何？
(1)850 元　(2)875 元　(3)900 元　(4)925 元　(5)950 元。【108 數甲】

答：(2)

解：

A	兩反	一正一反	兩正		
			兩反	一正一反	兩正
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$
\$	400	800	800+400	800+800	800+800

$E(X)=\sum P\$=100+400+75+200+100=875$

2. 設 n 為正整數。第 n 個費馬數（*Fermat Number*）定義為 $F_n=2^{\left(2^n\right)}+1$，
例如 $F_1=2^{\left(2^1\right)}+1=2^2+1=5$，$F_2=2^{\left(2^2\right)}+1=2^4+1=17$。
試問 $\frac{F_{13}}{F_{12}}$ 的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？
（$\log 2\approx 0.3010$）
(1)120　(2)240　(3)600　(4)900　(5)1200。【108 數甲】

答：(5)

解：$\log\frac{F_{13}}{F_{12}}=\log\frac{2^{\left(2^{13}\right)}+1}{2^{\left(2^{12}\right)}+1}\doteqdot\log 2^{\left(2^{13}-2^{12}\right)}\doteqdot 2^{12}\times 0.3010\doteqdot 1232.896$

3. 在一座尖塔的正南方地面某點 A，測得塔頂的仰角為 $14°$；又在此尖塔正東方地面某點 B，測得塔頂的仰角為 $18°30'$，且 A、B 兩點距離為 65 公尺。已知當在線段 $\overline{AB}$ 上移動時，在 C 點測得塔頂的仰角為最大，則 C 點到塔底的距離最接近下列哪一個選項？
（$\cot 14°\approx 4.01$，$\cot 18°30'\approx 2.99$）
(1)27 公尺　(2)29 公尺　(3)31 公尺　(4)33 公尺　(5)35 公尺。【108 數甲】

答：(3)

解：$\overline{OA}=h\cot 14°\doteqdot 4.01h$，$\overline{OB}=h\cot 18°30'\doteqdot 2.99h$

$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2\doteqdot\overline{AB}^2\Rightarrow 5h\doteqdot 65\Rightarrow h\doteqdot 13$

$$\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}=\frac{\overline{AB}\times d}{2}\Rightarrow d\fallingdotseq\frac{4\times13\times3\times13}{65}\fallingdotseq31.2$$

二、多選題（佔 40 分）

4. 設Γ為坐標平面上通過$(7,0)$與$\left(0,\frac{7}{2}\right)$兩點的圓。試選出正確的選項。

(1)Γ的半徑大於或等於5
(2)當Γ的半徑達到最小可能值時，Γ通過原點
(3)Γ與直線$x+2y=6$有交點
(4)Γ的圓心不可能在第四象限
(5)若Γ的圓心在第三象限，則Γ的半徑大於8。 【108 數甲】

答：(2)(5)

解：(1)(2)最小圓以$(7,0)$、$\left(0,\frac{7}{2}\right)$為直徑端點

$$\Rightarrow(x-7)(x)+(y)\left(y-\frac{7}{2}\right)=0\Rightarrow x^2+y^2-7x-\frac{7}{2}y=0$$

$$\Rightarrow\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{4}\right)^2=\left(\frac{7\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

其中，$r=\frac{7\sqrt{5}}{4}<5$，且圓過$(0,0)$

(3)Γ與直線$x+2y=6$不一定有交點

(4)(5)圓心在$(7,0)$、$\left(0,\frac{7}{2}\right)$的中垂線$2x-y=\frac{21}{4}$上會過第四象限，

且當圓心在第三象限，則Γ的半徑大於$d\left(\left(0,\frac{-21}{4}\right),\left(0,\frac{7}{2}\right)\right)=\frac{35}{4}>8$

5. 袋中有2顆紅球、3顆白球與1顆藍球，其大小皆相同。
今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。
試選出正確的選項。

(1)「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率
(2)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件
(3)「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件
(4)「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率
(5)「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率。 【108 數甲】

答：(1)(5)

解：(1)$P(R_1)=P(R_2)$，均為$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2)$P(R_1\cap R_2)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\neq\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=P(R_1)\times P(R_2)$

(3)$P(R_1\cap(W_2\cup B_2))\neq0$

(4)$P(R_1\cap R_2)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\neq\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=P(W_1\cap W_2)$

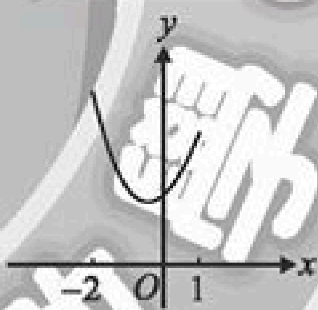
$(5)\ P\left(W_1 \cap W_2 \cap W_3\right)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{20}<\dfrac{3!\times\dfrac{3!}{1!2!}}{\dfrac{6!}{2!3!1!}}=\dfrac{3}{10}=P$（前三球顏色相異）

6. 設$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$為兩實數數列，且對所有的正整數n，$a_n<b_n^2<a_{n+1}$均成立。若已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$，試選出正確的選項。
(1)對所有的正整數n，$a_n>3$均成立
(2)存在正整數，使得$a_{n+1}>4$
(3)對所有的正整數n，$b_n^2<b_{n+1}^2$均成立
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=4$
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$或$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-2$。【108 數甲】

答：(3)(4)

解：(1)錯，因$\langle a_n\rangle$為嚴格遞增數列，所以無此必然
(2)錯，因$\langle a_n\rangle$為嚴格遞增數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$
(3)對，$a_n<b_n^2<a_{n+1}$且$a_{n+1}<b_{n+1}^2<a_{n+2}$
(4)對，夾擠定理
(5)錯

7. 已知三次實係數多項式函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$，在$-2\le x\le 1$範圍內的圖形如示意圖，試選出正確的選項：
(1)$a>0$　(2)$b>0$　(3)$c>0$　(4)方程式$f(x)=0$恰有三實根
(5)$y=f(x)$圖形的反曲點的y坐標為正。【108 數甲】



答：(2)(3)(5)

解：(1)$a<0$時，圖形合於條件 (4)應僅一實根

8. 坐標平面上以原點O為圓心的單位圓上三相異點A、B、C滿足$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，其中$A$點的坐標為$(1,0)$，試選出正確的選項：
(1)向量$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$的長度為4　(2)內積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$
(3)$\angle BOC$、$\angle AOC$、$\angle AOB$中，以$\angle BOC$的度數為最小
(4)$\overline{AB}>\dfrac{3}{2}$　(5)$3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$。【108 數甲】

答：(1)(5)

解：(1)$\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|-4\overrightarrow{OC}\right|^2\Rightarrow\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=4$

(2)$\left|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|-4\overrightarrow{OC}\right|^2\Rightarrow 4+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+9=16\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{4}$

(3)$\left|3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|-2\overrightarrow{OA}\right|^2\Rightarrow 9+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+16=4\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{-7}{8}$

$\left|2\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|-3\overrightarrow{OB}\right|^2\Rightarrow 4+16\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+16=9\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{-11}{16}$

故$\angle BOC>\angle AOC>\angle AOB$

(4)$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=1-2\times\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{3}{2}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\dfrac{3}{2}}<\dfrac{3}{2}$

(5)$\cos\angle AOB=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\sin\angle AOB=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$、$\cos\angle AOC=\dfrac{-11}{16}\Rightarrow\sin\angle AOC=\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$

故$3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$

三、選填題（佔 18 分）

A. 在坐標平面上，定義一個坐標變換$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$代表舊坐標，$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$代表新坐標，若舊坐標為$\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}$的點$P$經此坐標變換得到的新坐標為$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$，則$(r,s)=$＿＿＿＿。【108 數甲】

答：$(3,-1)$

解：$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}\times\dfrac{1}{2}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$

B. 在坐標平面上，$A(a,r)$、$B(b,s)$為函數圖形$y=\log_2 x$上之兩點，其中$a<b$。已知A、B連線的斜率等於2，且線段$\overline{AB}$的長度為$\sqrt{5}$，則$(a,b)=$＿＿＿＿。（化成最簡分數）【108 數甲】

答：$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

解：$A(a,r)\xrightarrow{m_{AB}=2,\ \overline{AB}=\sqrt{5}}B(a+1,r+2)=(b,s)$

$\Rightarrow\begin{cases}r=\log_2 a\\r+2=\log_2(a+1)\end{cases}\Rightarrow 2=\log_2\dfrac{a+1}{a}\Rightarrow\dfrac{a+1}{a}=4\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}\Rightarrow b=\dfrac{4}{3}$

C. 設z為複數。在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為z、0、$z+5-2\sqrt{3}i$（其中$i=\sqrt{-1}$），則z的實部為＿＿＿＿。（化成最簡分數）【108 數甲】

答：$-\dfrac{7}{2}$

解： $z\times(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)=z+5-2\sqrt{3}i \Rightarrow \left(\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z=5-2\sqrt{3}i$

$$\Rightarrow z=\frac{5-2\sqrt{3}i}{\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

第貳部分：非選擇題（佔 24 分）

一. 坐標空間中以 O 表示原點，給定兩向量 $\overrightarrow{OA}=(1,\sqrt{2},1)$、$\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$。試回答下列問題。

(1) 若 $\overrightarrow{OP}$ 是長度為 2 的向量，且與 $\overrightarrow{OA}$ 之夾角為 60°，試求向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OP}$ 的內積。(2 分)

(2) 承(1)，已知滿足此條件的所有點 P 均落在一平面 E 上，試求平面 E 的方程式。(2 分)

(3) 若 $\overrightarrow{OQ}$ 是長度為 2 的向量，分別與 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 之夾角皆為 60°，已知滿足此條件的所有點 Q 均落在一直線 L 上，試求直線 L 的方向向量。(4 分)

(4) 承(3)，試求出滿足條件的所有 Q 點之坐標。(4 分) 【108 數甲】

答：(1) 2 (2) $x+\sqrt{2}y+z=2$ (3) $(0,1,-\sqrt{2})$ (4) $\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{5}{3}\right)$、$(1,\sqrt{2},-1)$

解：(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=2\times2\times\cos60^\circ=2$

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1,\sqrt{2},1)\cdot(x,y,z)=2 \Rightarrow x+\sqrt{2}y+z=2$

(3)(4) $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=(1,\sqrt{2},1)\cdot(x,y,z)=2\times2\times\cos60^\circ\\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}=(2,0,0)\cdot(x,y,z)=2\times2\times\cos60^\circ\end{cases}$

$$\Rightarrow Q\in L:\begin{cases}x+\sqrt{2}y+z=2\\2x=2\end{cases} \Rightarrow Q\in L:\begin{cases}x=1\\\sqrt{2}y+z=1\end{cases} \Rightarrow Q\in L:\begin{cases}x=1\\y=t\\z=1-\sqrt{2}t\end{cases},t\in R$$

又 $\overrightarrow{OQ}$ 是長度為 2 的向量，故 $\sqrt{1^2+t^2+(1-\sqrt{2}t)^2}=2 \Rightarrow t=-\frac{\sqrt{2}}{3}$、$\sqrt{2}$

則 Q 點之坐標 $\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{5}{3}\right)$、$(1,\sqrt{2},-1)$

二. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)dt$ 對 $x\geq1$ 恆成立。試回答下列問題。

(1) 試求 $f(1)$。(2 分)

(2) 試求 $f'(x)$。(4 分)

(3) 試求 $f(x)$。 (2 分)

(4) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)dx=1$。(4 分) 【108 數甲】

答：(1) 2　(2) $f'(x)=12x^2-6x+2$　(3) $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$

解：(1) $1\times f(1)=3-2+1+0\Rightarrow f(1)=2$

(2) $f(x)+xf'(x)=12x^3-6x^2+2x+f(x)$

$\Rightarrow f'(x)=12x^2-6x+2$

(3) $f(x)=4x^3-3x^2+2x+k\xrightarrow{f(1)=2}k=-1$

(4) $\int_0^a f(x)=\left[x^4-x^3+x^2-x+C\right]_0^a=a^4-a^3+a^2-a=1$

令 $f(x)=x^4-x^3+x^2-x=x(x-1)\left(x^2+1\right)$

故知僅有一大於 1 的正實數，與一小於 0 的負實數

可使 $y=x^4-x^3+x^2-x$ 圖形與 $y=1$ 有交點

俞克斌數學