俞克斌 杯杯 陪你領先

108 課綱 第二冊

數列級數（科學班數資班用）

核心 0 學習地圖

1. 等差數列與級數：

(1) 定義：$a_{n+1}-a_n=d$(定值)

(2) 一般項：$a_n=a_1+(n-1)d$

(3) 部分和：$S_n=\left[a_1+a_n\right]\times\frac{n}{2}=\left[2a_1+(n-1)d\right]\times\frac{n}{2}$

(4) $p+q=m+n \Leftrightarrow a_p+a_q=a_m+a_n$

(5) 等差中項：

(6) $\langle a_n\rangle$為等差數列，(S_n)、$(S_{2n}-S_n)$、$(S_{3n}-S_{2n})$、...亦成等差

2. 等比數列與級數：

(1) 定義：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$(定值)

(2) 一般項：$a_n=a_1r^{n-1}$

(3) 部分和：$S_n=\frac{a_1\left[1-r^{\text{項數次方}}\right]}{1-r}(r\neq1)$，$S_n=na_1(r=1)$，

(4) $p+q=m+n \Leftrightarrow a_p\times a_q=a_m\times a_n$

(5) 等比中項：

(6) $\langle a_n\rangle$為等比數列，(S_n)、$(S_{2n}-S_n)$、$(S_{3n}-S_{2n})$、...亦成等比

核心 1　等差等比數列級數

1. 設$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$、$\langle d_n\rangle$及$\langle e_n\rangle$均為正實數所成的數列，

其中對任意自然數n，都有$b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$c_n=\log a_n$，

$d_n=2^{a_n}$，$e_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$，則下列何者正確？

(1) 若$\langle a_n\rangle$為等差數列則$\langle b_n\rangle$亦為等差數列

(2) 若$\langle a_n\rangle$為等比數列則$\langle c_n\rangle$亦為等比數列

(3) 若$\langle a_n\rangle$為等差數列則$\langle d_n\rangle$亦為等比數列

(4) 若$\langle a_n\rangle$為等比數列則$\langle e_n\rangle$亦為等比數列

(5) 若$\langle b_n\rangle$為等差數列則$\langle a_n\rangle$亦為等差數列

答：

解：

2. 已知數列$\langle a_n\rangle$滿足：$a_1=2$、$a_2=8$，且$\sqrt{a_n}=\dfrac{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_{n+1}}}{2}$

試求：$a_n=$ $\boxed{}$，$S_n=$ $\boxed{}$。

答：

解：

3. 設有規律的數列 $\sqrt{44-8}$ 、 $\sqrt{4444-88}$ 、 $\sqrt{444444-888}$ 、…的
前 n 項之和為 $\frac{a}{27}\left(10^{n+1}+bn+c\right)$ ，則 $(a,b,c)=$ $\boxed{}$

答：
解：

4. 設有奇數項之等比數列，其一切奇數項之積為 729，一切偶數項之積為 243，
求項數 $\boxed{}$ 。

答：
解：

核心 0　學習地圖

3. 遞迴數列：

(1) 定義：

(2) 處理原則：

核心 2　遞迴數列

1. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + (2n-3)$，$n \geq 1$，

則 $a_n =$ ＿＿＿＿、$S_n =$ ＿＿＿＿

解：

2. 設 $n \in N$，遞迴關係式為 $a_1 = 4$；$a_n = \dfrac{n+1}{n} a_{n-1}$，$n \geq 2$，

則 $a_n =$ ＿＿＿＿。

解：

3. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = 3$，且滿足遞迴關係式 $a_n = 2a_{n-1} + 5$，$n \geq 2$，$n \in N$，

試求一般項 $a_n =$ ＿＿＿＿、前 n 項總和 $S_n =$ ＿＿＿＿。

解：

4. 數列$\langle a_n \rangle$滿足$\begin{cases} a_1=6 \\ a_{n+1}=2a_n-4n+9 \end{cases}$，求一般項$a_n=$ $\boxed{}$。

答：

解：

5. 數列$\langle a_n \rangle$滿足$\begin{cases} a_2=a_3=6 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n \end{cases}$，求一般項$a_n=$ $\boxed{}$。

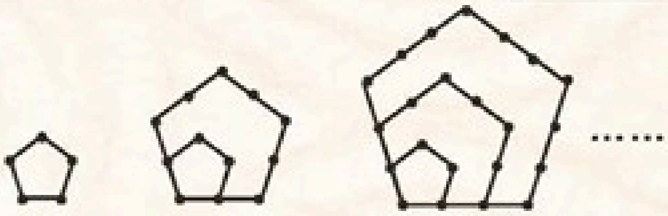
答：

解：

核心 3　遞迴數列應用

1. 利用**牙籤**排成如下的圖形，其圖形中所需的牙籤數目依序爲5、13、24、……

形成一數列 $\langle a_n \rangle$，試求：一般項 $a_n =$ $\boxed{\quad\quad}$ 。



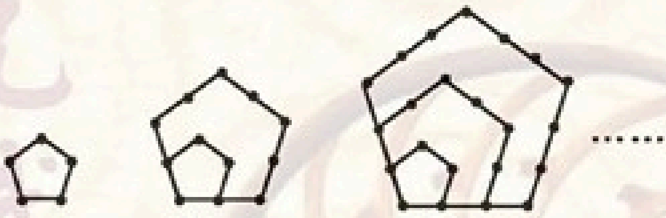
圖(一)　圖(二)　圖(三)

答：

解：

2. 圖中的**黑點**分別落在正五邊形的頂點或邊上，且任兩相鄰黑點的線段等長，

第1圖有5個黑點，第2圖共有12個黑點，第3圖則有22個黑點，

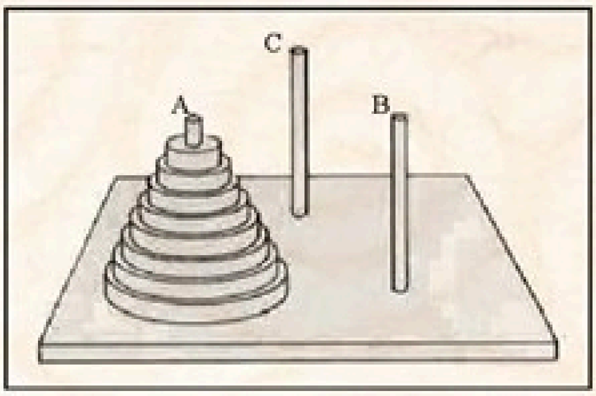


第1圖　第2圖　第3圖

按照這樣的規律，令 a_n 爲第 n 圖上的黑點總數。則：一般項 a_n 爲 $\boxed{\quad\quad}$ 。

解：

3. 1883 年，一位法國的數學家 Edouard Lucas 教授在歐洲的一份雜誌上介紹了一個相當吸引人的難題──迷人的智力遊戲。這個遊戲名爲河內塔(Tower of Hanoi)，它源自古印度神廟中的一段故事(也有一說是 Lucas 教授爲增加此遊戲之神秘色彩而捏造的)。傳說在古老的印度，有一座神廟，據說它是宇宙的中心。在廟宇中放置了一塊上面插有三根長木釘的木板，在其中的一根木釘上，從上至下被放置了 64 片直徑由小至大的圓環形金屬片。古印度教的天神指示祂的僧侶們將 64 片的金屬片移至三根木釘中的其中一根上。規定在每次的移動中，只能搬移一片金屬片，並且在過程中必須保持金屬片由上至下是直徑由小至大的次序，也就是說不論在那一根木釘上，圓環形的金屬片都是直徑較小的被放在上層。直到有一天，僧侶們能將 64 片的金屬片依規則從指定的木釘上全部移動至另一根木釘上，那麼，世界末日即隨之來到，世間的一切終將被毀滅，萬物都將至極樂世界。倘若這個故事的敘述爲眞，那麼，我們只需加速移動金屬片，是不是就能愈早到達極樂世界呢？果眞要移動這 64 片金屬片，那麼，至少要花幾次的搬動才能完成呢？有沒有規律可循呢？



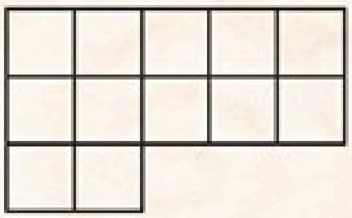
解：

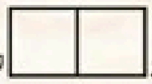
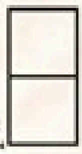
4. 設上樓梯時，一步可以上 1 階或者 2 階，

假如登上這個 n 階的階梯的方法共有 a_n 種，請求出一般項 a_n 爲 $\boxed{}$。

解：

5. 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。



今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即或。

則用 6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有 $\boxed{}$ 種。【103 學測】

答：

解：

6. 一隻青蛙在 a、b、c、d、e、f 等六相異點上跳動，每次跳動落點異於跳點。若此青蛙從 a 點開始起跳，跳四次後仍回到 a 點，則跳法數爲 $\boxed{}$ 。

【83 大學聯考】

答：105

解：

7. NBA 勇士隊在演練教練的 LUCKY-7 戰術：
控球後衛運球至前場之後，
連同後衛在內的 5 名球員由持球者自行選擇將球傳給 4 名隊友的其中一人，
如此傳球 7 次，且第 7 次須將球傳回給後衛由他投籃，
則 LUCKY-7 戰術的傳球方式共有 ______ 種

答：
解：

8. 將一個圓分成 12 個相等的扇形，並用紅藍綠三種顏色塗上顏色，
相鄰的扇形顏色不同，則有 ______ 種塗色方法

答：
解：