俞 克 斌 杯 杯 的核心100 for 2019大學入試學測

(51) 狹義與廣義三角函數

【觀念核心】

① 狹義三角函數定義：以單位圓上弦、切、割線為命名

② 基本關係式：

平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

倒數關係：$\sin\theta\csc\theta=1$，$\cos\theta\sec\theta=1$，$\tan\theta\cot\theta=1$

商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

③ 廣義三角函數定義：以 x 軸正向為始邊，$\overrightarrow{OP}$ 為終邊，所夾的有向角 θ，

$P(x,y)$，$\left|\overrightarrow{OP}\right|=r \Rightarrow \sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

$\sin\theta\Rightarrow$ I、II 象限取正　$\cos\theta\Rightarrow$ I、IV 象限取正　$\tan\theta\Rightarrow$ I、III 象限取正

④ 化任意角為銳角（奇變偶不變、正負看象限）：

設 F 表一三角函數，而 F_c 表 F 之餘函數，$n\in Z$，則

$$F(n\pi\pm\theta)=(\pm)F(\theta)、F\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=(\pm)F_c(\theta)$$

其中$(\pm)$由 $n\pi\pm\theta$ 或 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}\pm\theta$(視 θ 為銳角)所在象限之 F 值的正負決定之。

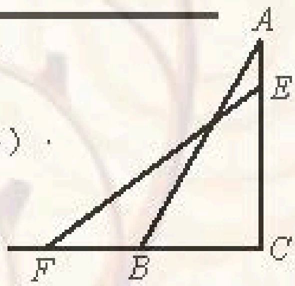
⑤ 弳度量、弧度制：$0°<\theta<90°$

$\dfrac{\pi}{3}$(弳)$\Leftrightarrow 60°$、$\dfrac{\pi}{6}$(弳)$\Leftrightarrow 30°$、$\dfrac{\pi}{4}$(弳)$\Leftrightarrow 45°$

π(弳)$\Leftrightarrow 180°$、$\pi°\approx 3.14°$、1(弳)$\Leftrightarrow 57.3°$

【鏈往核心】

1. 如圖所示（只是示意圖），將梯子 $\overline{AB}$ 靠在與地面垂直的牆 AC 上，測得與水平地面的夾角 $\angle ABC$ 為 $60°$。將在地面上的底 B 沿著地面向外拉 51 公分到點 F（即 $\overline{FB}=51$ 公分），此時梯子 $\overline{EF}$ 與地面的夾角 $\angle EFC$ 之正弦值為 $\sin\angle EFC=0.6$，則梯子長 $\overline{AB}=$________公分。　[107學測]

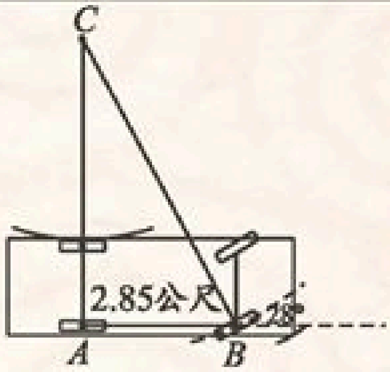


答：170

解：$\overline{AB}=\overline{EF}=x\xrightarrow{\angle ABC=60°}\overline{BC}=\dfrac{x}{2}$

$$\sin\angle EFC=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\angle EFC=\frac{51+\frac{x}{2}}{x}=\frac{4}{5}\qquad\therefore x=170$$

2. 附圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是。已知在低速前進時，圖中 A 處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直，B 處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。在圖中，已知軸距 $\overline{AB}$ 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為________公尺。



（小數點後第一位以下四捨五入，$\sin 28^\circ\approx 0.4695$，$\cos 28^\circ\approx 0.8829$）【104 學測】

答：6.1

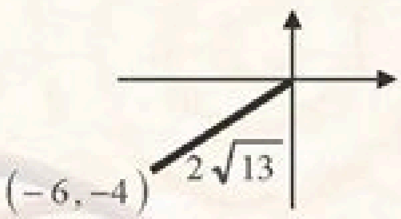
解：$\sin\angle ACB=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{y}{r}\Rightarrow\sin 28^\circ=\dfrac{2.85}{\overline{BC}}\Rightarrow\overline{BC}\approx\dfrac{2.85}{0.4695}\approx 6.07$

3. 在坐標平面上，廣義角 θ 的頂點為原點 O，始邊為 x 軸的正向，且滿足 $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$。若 θ 的終邊上有一點 P，其 y 坐標為 -4，則下列哪些選項一定正確？

(1) P 的 x 坐標是 6　(2) $\overline{OP}=2\sqrt{13}$　(3) $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

(4) $\sin 2\theta>0$　(5) $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$　【101 學測】

答：(2)(4)



解：$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-4}{x}=\dfrac{2}{3}\ \Rightarrow\ x=-6$

$\Rightarrow\ P(-6,-4)\in$ 第三象限

$\overline{OP}=r=\sqrt{52}=2\sqrt{13}\ \therefore\ \cos\theta=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}$、$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，

$\Rightarrow\ \sin 2\theta=2\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)=\dfrac{12}{13}>0$

$P(-6,-4)\in$ 第三象限，故 $180^\circ+360^\circ k\le\theta\le 270^\circ+360^\circ k$

且 $90^\circ+180^\circ k\le\dfrac{\theta}{2}\le 135^\circ+180^\circ k$ 為二、四象限 $\Rightarrow\ \cos\dfrac{\theta}{2}$ 可正可負

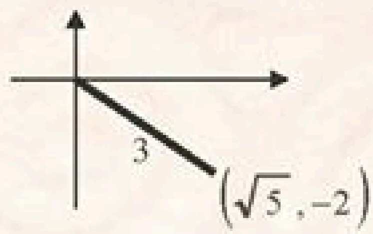
4. 已知 $\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 且 $\cos\theta>0$，請問下列哪些選項是正確的?

(1) $\tan\theta<0$　(2) $\tan^2\theta>\dfrac{4}{9}$　(3) $\sin^2\theta>\cos^2\theta$　(4) $\sin 2\theta>0$

(5) 標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在不同的象限　【100 學測】

答：(1)(2)

解：$\because \sin\theta=-\dfrac{2}{3}<0$，$\cos\theta>0 \Rightarrow$ θ為第四象限角，作圖可知



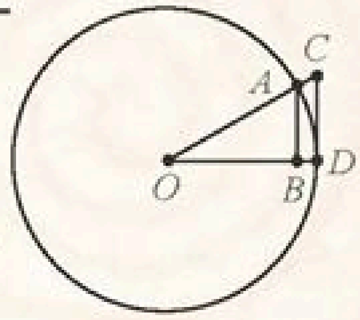
(1) $\tan\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}<0$　　(2) $\tan^2\theta=\dfrac{4}{5}>\dfrac{4}{9}$

(3) $\sin\theta=\dfrac{-2}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ $\Rightarrow$ $\sin^2\theta<\cos^2\theta$

(4) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{-4\sqrt{5}}{9}<0$

(5) $\cos 2\theta=\dfrac{1}{9}>0$，$\sin 2\theta=\dfrac{-4\sqrt{5}}{9}<0$ $\Rightarrow 2\theta$也是第四象限角

5. 設圓O之半徑為24，$\overline{OC}=26$，$\overline{OC}$交圓O於A點，$\overline{CD}$切圓O於D點，B為A點到$\overline{OD}$的垂足，如右邊的示意圖。則$\overline{AB}=$________。(化為最簡分數)
【103學測】



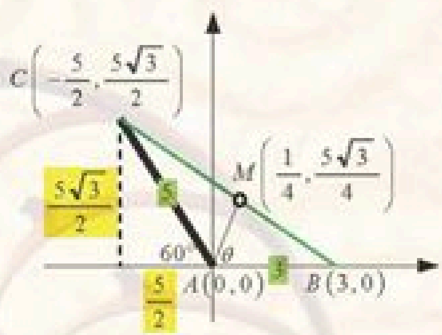
答：$\dfrac{120}{13}$

解：$\cos\theta=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\dfrac{12}{13}\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{y}{r}\Rightarrow \dfrac{5}{13}=\dfrac{\overline{AB}}{24}\Rightarrow \overline{AB}=\dfrac{120}{13}$

6. 在ΔABC中，M為$\overline{BC}$邊之中點，若$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且$\angle BAC=120^\circ$，則$\tan\angle BAM=$________。(化成最簡根式)
【96學測】

答：$5\sqrt{3}$

解：將各點予以座標化$A(0,0)$、$B(3,0)$、$C\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$、$M\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)$



利用『廣義三角』定義：$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=5\sqrt{3}$

7. 若$\sin x=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$，則下列選項何者為真？

(1) $\cos x=\dfrac{4}{5}$　(2) $\tan x=\dfrac{3}{4}$　(3) $\cot x=-\dfrac{4}{3}$　(4) $\sec x=-\dfrac{5}{4}$　(5) $\csc x=\dfrac{5}{3}$
【90學測】

答：(3)(4)(5)

解：$\because \dfrac{\pi}{2}<x<\pi$，在第二象限

$\therefore \sin x=\dfrac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $\cos x=\dfrac{-4}{5}$、$\tan x=\dfrac{3}{-4}$

且 $\csc x=\dfrac{5}{3}$、$\sec x=\dfrac{-5}{4}$、$\cot x=\dfrac{-4}{3}$　　故選(3)(4)(5)

8. 設 θ_1 ,θ_2 ,θ_3 ,θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0 與 2π 之間。
已知 $|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\dfrac{1}{3}$，試問下列哪些選項是正確的？
(1) $\theta_1<\dfrac{\pi}{4}$　(2) $\theta_1+\theta_2=\pi$　(3) $\cos\theta_3=-\dfrac{1}{3}$
(4) $\sin\theta_4=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(5) $\theta_4=\theta_3+\dfrac{\pi}{2}$　［99 學測］

答：(2)(3)

解：(1) $\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta_1>\dfrac{\pi}{4}$
(4) $\sin\theta_4<0$
(5) $\theta_3=180°+\theta_1$　$\theta_4=360°-\theta_1$

9. 請問 sin73°、sin146°、sin219°、sin292°、sin365° 這五個數值的中位數是哪一個？
(1) sin73°　(2) sin146°　(3) sin219°　(4) sin292°　(5) sin365°　［105 學測］

答：(5)

解：由小而大排序
$\sin292°=-\sin68°$、$\sin219°=-\sin39°$、$\boxed{\sin365°=\sin5°}$、$\sin146°=\sin34°$、$\sin73°$

10. 下列敘述何者為真？
(1) $\sin50°<\cos50°$　(2) $\tan50°<\cot50°$　(3) $\tan50°<\sec50°$
(4) $\sin230°<\cos230°$　(5) $\tan230°<\cot230°$　［87 學測］

答：(3)(4)

解：(1) 超過 45°，$\sin50°>\cos50°$
(2) 超過 45°，$\tan50°>\cot50°$
(3) 對同一銳角角度，$\sin\theta<\tan\theta<\sec\theta$，正確
(4) $\sin230°=-\sin50°$，$\cos230°=-\cos50°$
因為 $\sin50°>\cos50°$，所以 $-\sin50°<-\cos50°$，
所以 $\sin230°<\cos230°$，正確
(5) $\tan230°=\tan50°$，$\cot230°=\cot50°$
因為 $\tan50°>\cot50°$，所以 $\tan230°>\cot230°$

11. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $50°\le\angle A<\angle B\le60°$，試選出正確的選項：
(1) $\sin A<\sin B$　(2) $\sin B<\sin C$　(3) $\cos A<\cos B$　(4) $\sin C<\cos C$　(5) $\overline{AB}<\overline{BC}$。
［108 年學測］

答：(1)(2)

解：$50°\le\angle A<\angle B\le60°\xrightarrow{100°<\angle A+\angle B<120°}60°<\angle C<80°$
(1)(2) $\sin A<\sin B<\sin C$　(3) $\cos A>\cos B$
(4) $\sin C>\cos C$　(5) $\overline{AB}=c>a=\overline{BC}$

12. 下列哪一個選項的數值最接近$\cos(2.6\pi)$？

(1) $\sin(2.6\pi)$ (2) $\tan(2.6\pi)$ (3) $\cot(2.6\pi)$

(4) $\sec(2.6\pi)$ (5) $\csc(2.6\pi)$ 【105 數甲】

答：(3)

解：$\cos 2.6\pi = \cos 0.6\pi = \cos 108° = -\cos 72° \approx 0.3090$

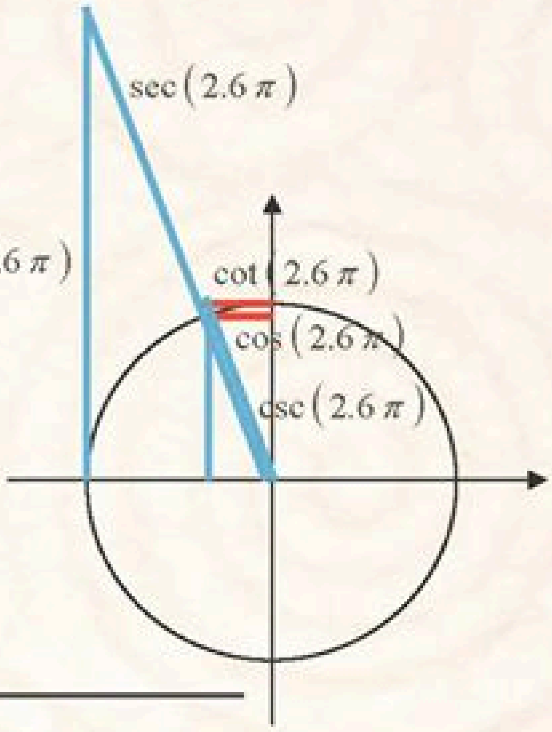
(1)(5) 均為正，不合

(2) $\tan 2.6\pi \approx -3.0777$，不合

(3) $\cot 2.6\pi \approx -0.3249$，合

(4) $\sec 2.6\pi \approx -3.2361$，不合

解：依定義，如右圖



13. 下列那一個正切函數值最大？

(A) $\tan\left(-\dfrac{26\pi}{11}\right)$ (B) $\tan\left(-\dfrac{17\pi}{11}\right)$

(C) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right)$ (D) $\tan\left(\dfrac{13\pi}{11}\right)$ (E) $\tan\left(\dfrac{23\pi}{11}\right)$ 【80 日社】

答：(B)

解：(A) $\tan\left(-\dfrac{26\pi}{11}\right) = \tan\left(\dfrac{-4\pi}{11}\right) = -\tan\left(\dfrac{4\pi}{11}\right)$（同界角）

(B) $\tan\left(-\dfrac{17\pi}{11}\right) = \tan\left(\dfrac{5\pi}{11}\right)$（同界角） (D) $\tan\left(\dfrac{13\pi}{11}\right) = \tan\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$（$-180°$）

(E) $\tan\left(\dfrac{23\pi}{11}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{11}\right)$（同界角）

因為$\tan\left(\dfrac{5\pi}{11}\right) > \tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) > \tan\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) > \tan\left(\dfrac{\pi}{11}\right) > -\tan\left(\dfrac{4\pi}{11}\right)$

所以$\tan\left(-\dfrac{17\pi}{11}\right) > \tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) > \tan\left(\dfrac{13\pi}{11}\right) > \tan\left(\dfrac{23\pi}{11}\right) > \tan\left(-\dfrac{26\pi}{11}\right)$

14. 試問有多少個實數x滿足$\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$且$\cos x° \le \cos x$？

(1)0 個 (2)1 個 (3)2 個 (4)4 個 (5)無窮多個。 【106學測】

答：(1)

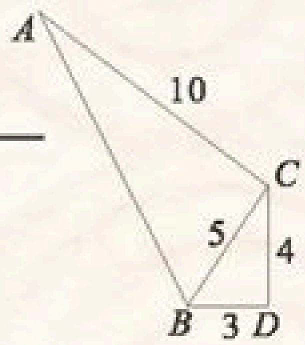
解：$\dfrac{\pi}{2} \approx 1.57\cdots \le x \le \dfrac{3\pi}{2} \approx 4.71\cdots$，故$x°$位於第一象限，故$\cos x° > 0$

$\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$時，$-1 \le \cos x \le 0$

故 $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ 時，$\cos x° > \cos x$ 才成立，故 $\cos x° \le \cos x$ 無解

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 將二股長為 5 公分、10 公分的直角 ΔABC 及二股長為 3 公分、4 公分的直角 ΔBCD 擺放如圖，則 $\overline{AD}=$ ________。



2. 小志計算出一正五邊形外接圓與內切圓之間所夾區域的面積為 A；小剛計算出另一正六邊形外接圓與內切圓之間所夾區域的面積為 B。若這兩個多邊形的邊長都是 2，則下列何者正確？
(1) $A=\frac{25}{36}B$　(2) $A=\frac{36}{25}B$　(3) $A=\frac{5}{6}B$　(4) $A=\frac{6}{5}B$　(5) $A=B$。

3. 已知二次方程式 $x^2+2(\sin\theta+\cos\theta)x+1=0$ 有一根為 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，則 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=$ ________。

4. 設 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{3}$，其中 $0° \le \theta < 360°$，則 $\sin\theta+\cos\theta=$ ________。

5. ΔABC 為銳角三角形，則下列何者正確？

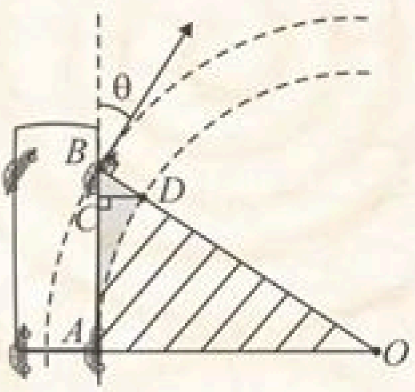
(1) $\sin A > \cos B$

(2) $\sin A + \sin B > \cos A + \cos B$

(3) $\sin A + \sin B > \cos B + \cos C$

(4) $\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$

6. 依汽車基本構造與作用原理，當汽車轉彎的時候，其前後輪前進的軌跡不相同，也就是會產生偏移，此種情形稱為輪差。在轉彎內側者，稱為「內輪差」，而內輪差隨著前後車輪軸距的長度及轉向角度而有所不同。通常車身愈長（即軸距越長）內輪差就愈大。如右圖的陰影區域為內輪差危險區域，斜線區域為安全區，其中 D 點為距離汽車之理論安全位置，即當行人與汽車之垂直距離 $> \overline{CD}$ 時，理論上能確保行人之安全。假設汽車前後車輪軸距 $\overline{AB} = 200$ 公分，轉向角度 $\theta = 30°$，則理論安全距離 $\overline{CD} =$ ________公分。（四捨五入到整數位）



【2019 年 11 月最新模擬考】

7. 設 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 分別為第一、二、三、四象限角，且都介於 0 與 2π 之間，已知 $\left|\sin\theta_1\right| = \left|\sin\theta_2\right| = a$，$\left|\sin\theta_3\right| = \left|\sin\theta_4\right| = b$，試選出正確的選項？

(1) $\cos\theta_2 = \sqrt{1-a^2}$　(2) $\theta_1 + \theta_2 = \pi$　(3) 若 $b = \frac{1}{4}$，則 $\theta_3 + \frac{\pi}{2} < \theta_4$

(4) 若 $a = b$，則 $\theta_4 - \theta_2 = \pi$　(5) 若 $a > b$，則 $\theta_2 - \theta_1 > \theta_4 - \theta_3$。

【2019 年 11 月最新模擬考】