俞克斌杯杯的核心100 for 2019大學入試學測

(52) 餘弦定律

【觀念核心】

令$\triangle ABC$之$\angle A$對邊長為a，$\angle B$對邊長為b，$\angle C$對邊長為c，則

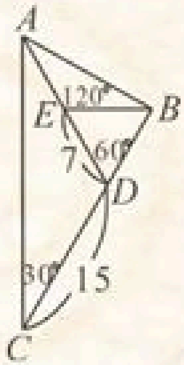
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \qquad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \qquad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \qquad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

【鑑往核心】

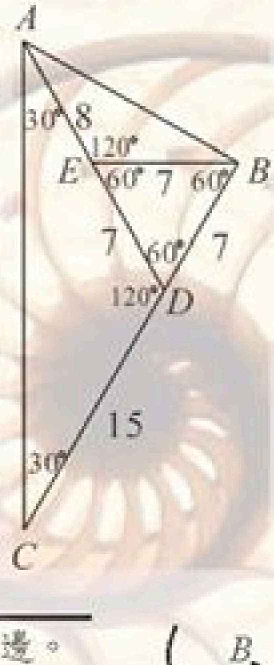
1. 如圖（此為示意圖），在ΔABC中，$\overline{AD}$交$\overline{BC}$於D點，$\overline{BE}$交$\overline{AD}$於E點，且$\angle ACB=30°$，$\angle EDB=60°$，$\angle AEB=120°$，若$\overline{CD}=15$，$\overline{ED}=7$，則$\overline{AB}=$______。
【108學測】



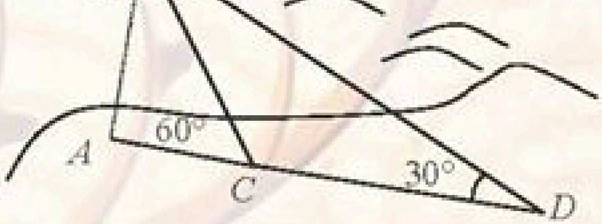
答：13

解：利用餘弦定律：

$$\overline{AB}=\sqrt{7^2+8^2-2\times7\times8\times\cos120°}$$
$$=13$$



2. 如右圖，A、B兩點分別位於一河口的兩岸邊。某人在通往A點的筆直公路上，距離A點50公尺的C點與距離A點200公尺的D點，分別測得$\angle ACB=60°$，$\angle ADB=30°$，則A與B的距離為______公尺。
【87學測】

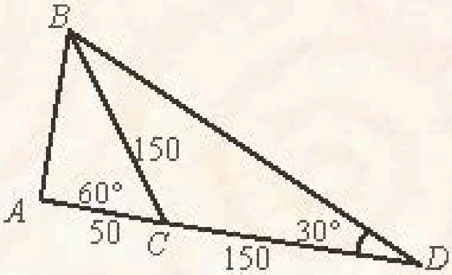


答：$50\sqrt{7}$

解：利用『餘弦定律』

$\Rightarrow \cos 60° = \dfrac{50^2 + 150^2 - \overline{AB}^2}{2 \times 50 \times 150}$

$\therefore \overline{AB} = 50\sqrt{7}$ ……答



3. 已知四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=8$、$\overline{CD}=8$、$\overline{AD}=3$，且$\angle ABC=\angle ADC=60°$，試求$\overline{BC}$之長________。　［89 日社（計算題10分）］

答：3 或 5

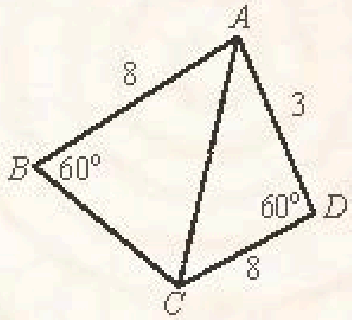
解：在ΔADC中：利用『餘弦定律』

$\cos 60° = \dfrac{8^2 + 3^2 - \overline{AC}^2}{2 \times 8 \times 3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overline{AC} = 7$

在ΔABC中：利用『餘弦定律』

$\cos 60° = \dfrac{8^2 + \overline{BC}^2 - 7^2}{2 \times 8 \times \overline{BC}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \overline{BC}^2 - 8 \cdot \overline{BC} + 15 = 0$，故$\overline{BC}=3$或$5$

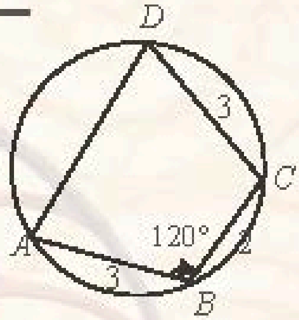


解：在ΔABC中：$\overline{AC}^2 = 8^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot 8 \cdot \overline{BC} \cdot \cos 60°$ …(1)

在ΔADC中：$\overline{AC}^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60°$ …(2)

(1)−(2)：$\overline{BC}^2 - 8\overline{BC} + 15 = 0$，故$\overline{BC}=3$或$5$

4. 圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\angle ABC = 120°$，則$\overline{AD}=$________。　［83 大學聯考］



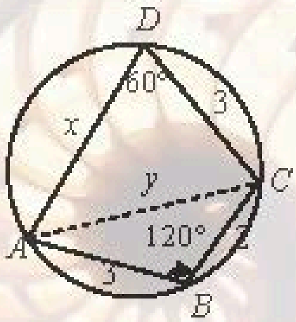
答：5

解：$\cos 120° = \dfrac{9+4-y^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\dfrac{1}{2}$

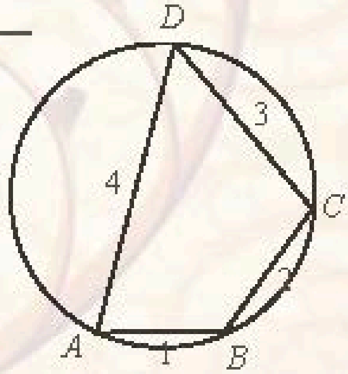
$\therefore y = \sqrt{19}$

$\cos 60° = \dfrac{9+x^2-19}{2 \cdot 3 \cdot x} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore x = 5$ 或 -2（不合）



5. 已知圓內接四邊形的各邊長為$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=4$，則對角線$\overline{BD}$的長度為________。　［86 學測］



答：$\sqrt{\dfrac{77}{5}}$

解：令$\angle DAB = \theta$，則$\angle DCB = 180° - \theta$

由$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{3^2+2^2-x^2}{2\times3\times2}=-\frac{4^2+1^2-x^2}{2\times4\times1} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{77}{5}}$$

6. 四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=1,\overline{BC}=5,\overline{CD}=5,\overline{DA}=7$，且 $\angle DAB=\angle BCD=90^\circ$，則對角線 $\overline{AC}$ 長為________。 [100 學測]

答：$\sqrt{32}$

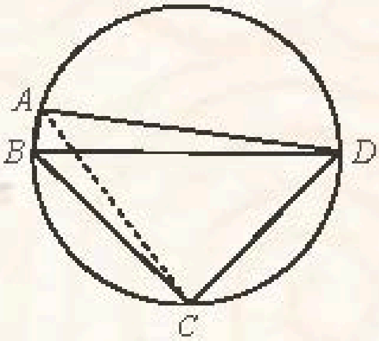
解：四邊形 $ABCD$ 內接於一圓

令 $\angle ADC=\theta$、$\angle ABC=180^\circ-\theta$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{1^2+5^2-\overline{AC}^2}{2\times1\times5}=-\frac{7^2+5^2-\overline{AC}^2}{2\times7\times5}$$

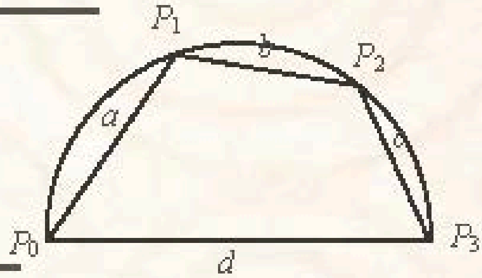
$$\Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{32}$$



7. $\overline{P_0P_3}$ 為半圓之直徑，P_1、P_2 為半圓周上兩點。

令 $a=\overline{P_0P_1}$，$b=\overline{P_1P_2}$，$c=\overline{P_2P_3}$，$d=\overline{P_0P_3}$。

試證：d 為方程式 $x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$ 之一根。 [81 日自]



證：(1) 令 $\angle P_1P_0P_3=\theta$，則 $\angle P_1P_2P_3=180^o-\theta$

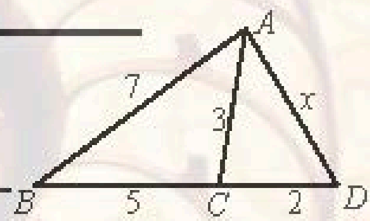
(2) 又連接 $\overline{P_1P_3}$，則 $\angle P_0P_1P_3=90^o$

(3) 由 $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta \Rightarrow \dfrac{b^2+c^2-(d^2-a^2)}{2\times b\cdot c}=-\dfrac{a}{d}$

$$\Rightarrow d^3-(a^2+b^2+c^2)d-2abc=0$$

(4) 得證：d 為方程式 $x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$ 之一根。

8. 已知 ΔABC 三邊長分別為 $\overline{AB}=7$、$\overline{BC}=5$、$\overline{AC}=3$，延長 $\overline{BC}$ 至 D，如右圖所示，使得 $\overline{CD}=2$，則 $\overline{AD}=$________。 [86 日社]

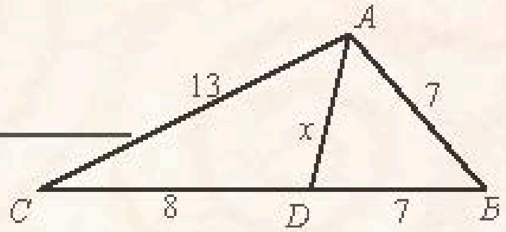


答：$\sqrt{7}$

解：令 $\angle ACD=\theta$，則 $\angle ACD=180^\circ-\theta$

$$由\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta \Rightarrow \frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{3^2+2^2-x^2}{2\cdot3\cdot2} \Rightarrow x=\sqrt{7}$$

7. 在三角形 ABC 中，若 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=13$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$，則 $\overline{AD}=$______。 [95學測]



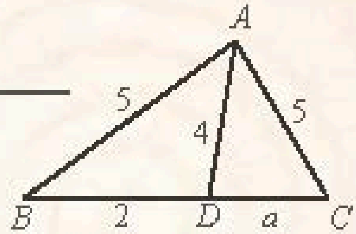
答：7

解：令 $\angle ADC=\theta$，則 $\angle ADB=180^\circ-\theta$

由 $\cos\left(180^\circ-\theta\right)=-\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{7^2+x^2-7^2}{2\cdot 7\cdot x}=-\frac{8^2+x^2-13^2}{2\cdot 8\cdot x} \quad \therefore x=7$$

8. 如圖所示 ΔABC 中，D 為邊 $\overline{BC}$ 上一點，$\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{AD}=4$，$\overline{BD}=2$，$\overline{DC}=a$，則 $a=$______。 [92數乙]



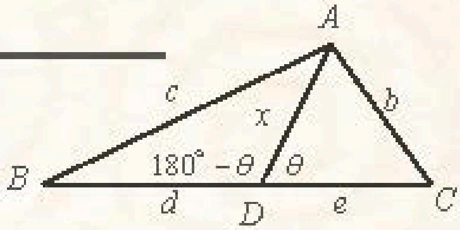
答：$\dfrac{9}{2}$

解：令 $\angle ADC=\theta$，則 $\angle ADB=180^\circ-\theta$

由 $\cos\left(180^\circ-\theta\right)=-\cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{4^2+2^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 2}=-\frac{4^2+a^2-5^2}{2\cdot 4\cdot a} \Rightarrow a=\frac{9}{2},-2 \text{（不合）}$$

9. 銳角三角形 ABC，D 為 $\overline{BC}$ 上一點，令 $\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$、$\overline{BD}=d$、$\overline{CD}=e$。假設 $c^2-d^2=b^2-e^2$，求證 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 垂直。 [93數甲補]



證：由餘弦定理及 $\cos\left(180^\circ-\theta\right)=-\cos\theta \Rightarrow \dfrac{x^2+d^2-c^2}{2\cdot x\cdot d}=-\dfrac{x^2+e^2-b^2}{2\cdot x\cdot e}$

$$\Rightarrow d\left(x^2+e^2-b^2\right)=-e\left(x^2+d^2-c^2\right)$$

$$\Rightarrow (d+e)x^2=d\left(b^2-e^2\right)+e\left(c^2-d^2\right)$$

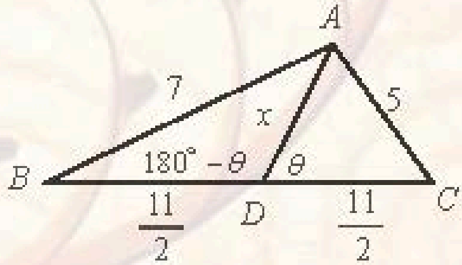
$\because c^2-d^2=b^2-e^2$

$\therefore x^2=b^2-e^2$ 由畢氏定理可知 ΔACD 為直角三角形 $\therefore \overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 垂直

10. 已知 ΔABC 三邊分別為 5、7、11，試求其三中線長。 [80大學聯考]

答：$\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$、$\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$、$\dfrac{3}{2}\sqrt{35}$

解：
$$\frac{x^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2-7^2}{2\cdot x\cdot\left(\frac{11}{2}\right)}=-\frac{x^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2-5^2}{2\cdot x\cdot\left(\frac{11}{2}\right)}$$



$\Rightarrow\ 2x^2 = 25+49-\dfrac{121}{2} \ \Rightarrow\ x=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$。

其餘二者依此類推。

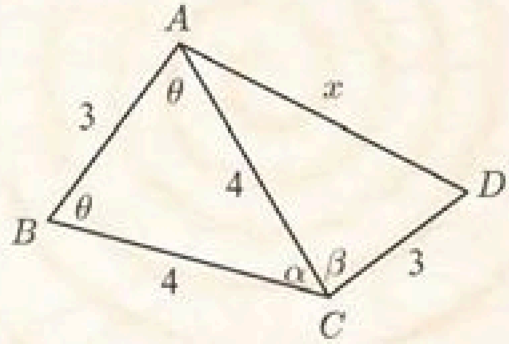
11. 在（凸）四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=x$，且對角線 $\overline{AC}=4$。請選出正確的選項：

(1) $\cos\angle ABC \ge \dfrac{3}{7}$　(2) $\cos\angle BAD > \cos\angle ABC$　(3) x 可能為 1

(4) $x<\dfrac{13}{2}$　(5) 若 A、B、C、D 四點共圓，則 $x=\dfrac{7}{4}$　【103 數甲】

答：(4)(5)

解：(1) $\cos\angle ABC=\dfrac{3^2+4^2-4^2}{2\times3\times4}=\dfrac{3}{8}<\dfrac{3}{7}$



(2) $\because \angle BAD>\angle BAC=\angle ABC$（cos 係「減函數」）

$\therefore \cos\angle BAD<\cos\angle ABC$

(3) $\because \overline{DA}+\overline{DC}>\overline{AC}$（三角形任兩邊和大於第三邊）

$\therefore \overline{DA}>4-3 \quad \Rightarrow x>1$

(4) $\because ABCD$ 為凸四邊形（故 $\beta<180^\circ-\alpha$）

$\therefore \cos\angle ACD>\cos(180^\circ-\angle ACB)$

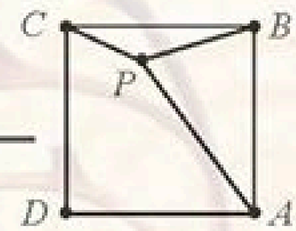
$\Rightarrow \dfrac{3^2+4^2-x^2}{2\cdot3\cdot4}>-\dfrac{4^2+4^2-3^2}{2\cdot4\cdot4} \quad \Rightarrow x^2<\dfrac{169}{4} \quad \Rightarrow x<\dfrac{13}{2}$

(5) $\cos\angle ADC=-\cos\angle ABC$（$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC$）

$\Rightarrow \dfrac{x^2+3^2-4^2}{2\cdot x\cdot 3}=-\dfrac{3}{8} \quad \Rightarrow 4x^2+9x-28=0 \ \Rightarrow x=\dfrac{7}{4}$ 或 -4(不合)

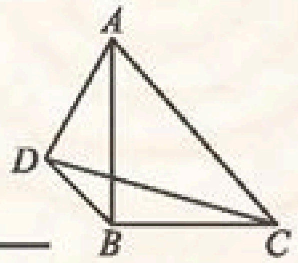
【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 如圖所示，已知 P 為正方形 $ABCD$ 內部的一點，若 $\overline{AP}=\sqrt{10}$，$\overline{BP}=2$，$\overline{CP}=\sqrt{2}$，則正方形 $ABCD$ 的面積為________平方單位。

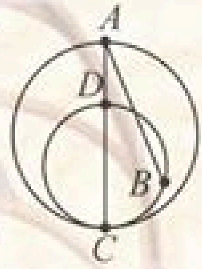


2. 已知ΔABC中，$\overline{BA}=5$，$\overline{CA}=3$，$\angle BAC=120°$，
先以B為圓心，$\overline{BA}$為半徑畫弧，交$\overline{BC}$於D點，
再以C為圓心，$\overline{CA}$為半徑畫弧，交$\overline{BC}$於E點，
連接$\overline{AE}$、$\overline{AD}$，試問ΔADE面積為________。(化為最簡根式)　【全國模】

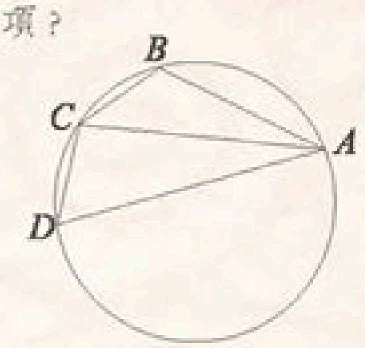
3. 如圖，ΔABC為等腰直角三角形，
若$\overline{AC}=\overline{DC}$且$\overline{BD}$平行$\overline{AC}$，
若$\overline{AB}=2$，試求$\overline{BD}=$________。
【學測模】



4. 如圖，有兩個圓內切於C點，大圓半徑為3，
小圓半徑為2，A點為大圓上一點，B、D
兩點均在小圓上，若$\overline{AC}=6$，$\overline{AB}=5$，
則$\overline{BD}=$________。　【中區模】



5. 如圖，已知圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{CD}=3$，$\angle ABC=120^\circ$，而 $\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 三線段長依序成等差數列，其長度和為15，請選出正確的選項？



(1) $\overline{AC}=8$

(2) $\overline{AD}=8$

(3) $\angle CAD=\angle CAB$

(4) 四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$ 平方單位

(5) 四邊形 $ABCD$ 為梯形。

6. ΔABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且 $\angle ABC=2\angle ACB$。若在 $\overline{BC}$ 邊上取一點 D，使得 $\angle ADC=2\angle ABC$，則 $\overline{AD}=$_______。(化為最簡分數)

【2019 年 10 月最新模擬考】