俞克斌杯杯的核心100 for 2019 大學入試學測

(53) 正弦定律

【觀念核心】

在$\triangle ABC$中，若$\angle A$對邊長為a，$\angle B$對邊長為b，$\angle C$對邊長為c，則

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ （此處R為$\triangle ABC$之外接圓半徑）

(1) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

(2) $\sin A=\frac{a}{2R}$、$a=2R\sin A$

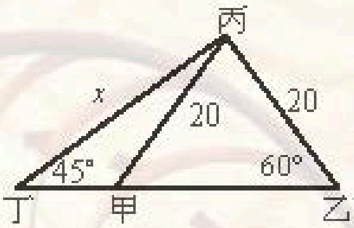
【鑑往核心】

1. 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里。
兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。
今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為45°，
則丙、丁兩鎮間的距離約為
(1) 24.5 公里　(2) 25 公里　(3) 25.5 公里　(4) 26 公里　(5) 26.5 公里
[98 學測]

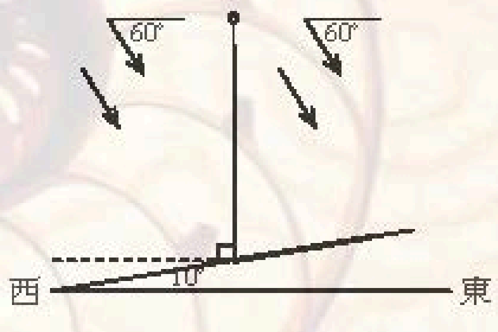
答：(1)

解：根據題意畫出右圖，
利用『正弦定律』：

$$\frac{x}{\sin 60^\circ}=\frac{20}{\sin 45^\circ}\Rightarrow x=10\sqrt{6}\approx 24.49$$



2. 在與水平面成10°的東西向山坡上，鉛直（即與水平面垂直）立起一根旗竿。
當陽光從正西方以俯角60°平行投射在山坡上時，
旗竿的影子長為 11 公尺，
如下圖所示（其中箭頭表示陽光投射
的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子）
試問旗竿的長度最接近以下哪一選項？
(1) 19.1 公尺　(2) 19.8 公尺　(3) 20.7 公尺
(4) 21.1 公尺　(5) 21.7 公尺
參考數值：$\sin 10^\circ\approx 0.174$，$\sin 20^\circ\approx 0.342$，
$\cos 10^\circ\approx 0.985$，$\cos 20^\circ\approx 0.940$，$\sqrt{3}\approx 1.732$



[97 數甲]

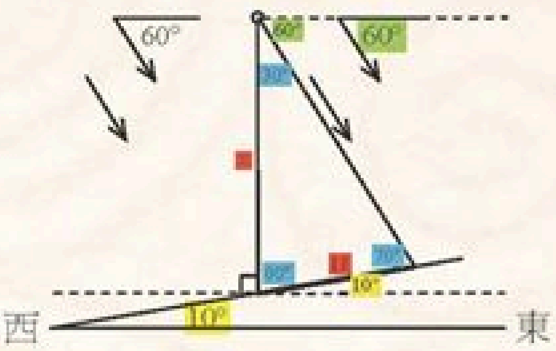
答：(3)

解：$\frac{x}{\sin 70^\circ}=\frac{11}{\sin 30^\circ}$

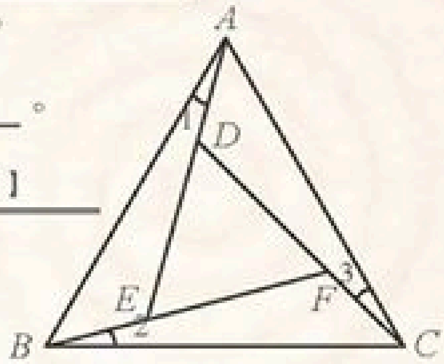
$\Rightarrow\ x = 22\sin 70° = 22\cos 20°$

$\approx 22\times 0.940 = 20.68$

選(3)



3. 如圖，正三角形 ABC 的邊長為 1，並且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=15°$。
已知 $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，則正三角形 DEF 的邊長為________。
（化為最簡根式） 【103 學測】



答：$\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解：ΔABE 中 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin 120°}=\dfrac{\overline{BE}}{\sin 15°}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin 45°}$

$$\Rightarrow \overline{DE}=\overline{AE}-\overline{AD}=\overline{AE}-\overline{BE}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. 在 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\cos\angle ABC=-\dfrac{3}{5}$，且其外接圓半徑為 $\dfrac{13}{2}$，
則 $\sin\angle BAC=$________。 【99數甲】

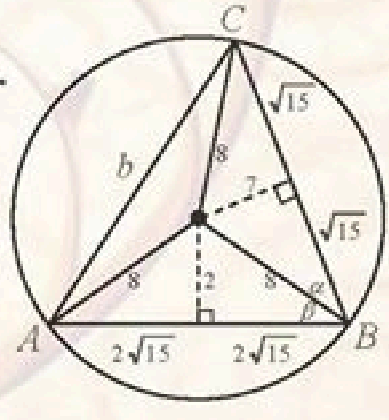
答：$\dfrac{33}{65}$

解：由『正弦定律』知：$\dfrac{5}{\sin C}=2\times\dfrac{13}{2}\ \Rightarrow\ \sin C=\dfrac{5}{13}\ \Rightarrow\ \cos C=\dfrac{12}{13}$

又：$\cos B=-\dfrac{3}{5}\ \Rightarrow\ \sin B=\dfrac{4}{5}$

$$\sin\angle BAC=\sin(B+C)=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\times\frac{-3}{5}=\frac{33}{65}$$

5. 設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8。
已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，
則 $\overline{AC}=$________。（化成最簡根式）
【102 學測】

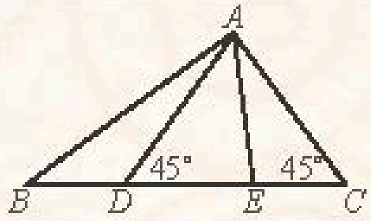


答：$4\sqrt{15}$

解：$b=2R\sin B=2\times 8\times\sin(\alpha+\beta)$

$$=16\times\left(\frac{7}{8}\times\frac{2\sqrt{15}}{8}+\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{2}{8}\right)=4\sqrt{15}$$

6. 如圖 $\triangle ABC$ 中，
$\overline{BC}$ 邊上兩點 D、E 分別與 A 連線。
假設 $\angle ACB=\angle ADC=45°$，
三角形 ABC、ABD、ABE 的外接圓半徑
分別為 R_1、R_2、R_3。
請問 R_1、R_2、R_3 的大小順序______。



[91學測(2)]

答：$R_1=R_2>R_3$

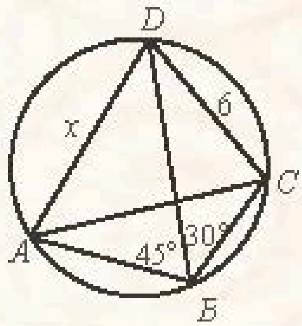
解：由『正弦定律』知：

$\triangle ABC$ 中：$\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R_1$、$\triangle ABD$ 中：$\dfrac{\overline{AD}}{\sin B}=2R_2$、$\triangle ABE$ 中：$\dfrac{\overline{AE}}{\sin B}=2R_3$

因為 $\angle ACB=\angle ADC=45°<\angle AEB$

所以 $\overline{AC}=\overline{AD}>\overline{AE}\Rightarrow R_1=R_2>R_3$

7. 如圖所示，$ABCD$ 為圓內接四邊形；
若 $\angle DBC=30^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$，$\overline{CD}=6$，
則線段 $\overline{AD}=$______。 [95學測]

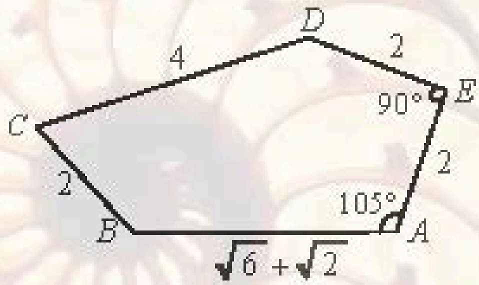


解：$\angle DBC=30^\circ=\angle DAC$，$\angle ABD=45^\circ=\angle ACD$

在 $\triangle ACD$ 中，由『正弦定律』知：

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ}\quad\Rightarrow\quad\overline{AD}=6\sqrt{2}$$

8. 最近數學家發現一種新的可以無縫密舖平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如下。
關於這五邊形，請選出正確的選項：
(1) $\overline{AD}=2\sqrt{2}$
(2) $\angle DAB=45°$
(3) $\overline{BD}=2\sqrt{6}$
(4) $\angle ABD=45°$
(5) $\triangle BCD$ 的面積為 $2\sqrt{2}$。
[106學測]

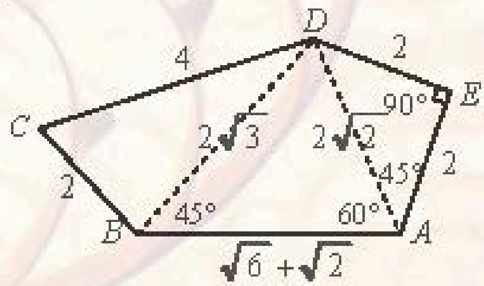


答：(1)(4)

解：(1) 正確：$\triangle ADE$ 為等腰直角三角形，故 $\overline{AD}=2\sqrt{2}$
(2) 錯誤：承(1)，$\angle DAE=45°$，故 $\angle DAB=60°$
(3) 錯誤：由餘弦定理知

$$\cos 60°=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2-\overline{BD}^2}{2\left(2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}，$$

$\overline{BD}=2\sqrt{3}$



(4) 正確：承(3)，由正弦定理

知$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\angle ABD}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\angle ADB}\Rightarrow\begin{cases}\angle ABD=45^\circ\\ \angle ADB=75^\circ\end{cases}$

(5) 錯誤：ΔBCD為直角三角形，面積為$2\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{3}$

所以$\overline{AC}=\overline{AD}>\overline{AE}\quad\Rightarrow\quad R_1=R_2>R_3$

9. 在ΔABC中，D為$\overline{BC}$邊上一點且$\overline{AD}$平分$\angle BAC$。
已知$\overline{BD}=5$、$\overline{DC}=7$，且$\angle ABC=60^\circ$：
(1) 試求$\sin\angle ACB$之值。
(2) 試求$\sin\angle BAC$之值。
(3) 試求$\overline{AB}$邊之長。 【101數甲】

答：(1)$\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$ (2)$\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ (3)$\dfrac{15}{2}$

解：因為$\overline{AD}$平分$\angle BAC$，故令$\overline{AB}=5t$、$\overline{AC}=7t$

由「餘弦定律」知$\cos 60^\circ=\dfrac{(5t)^2+12^2-(7t)^2}{2\times 5t\times 12}\Rightarrow t=\dfrac{3}{2}$、$-4$（不合）

則$\overline{AB}=\dfrac{15}{2}$、$\overline{AC}=\dfrac{21}{2}$

而$\cos\angle ACB=\dfrac{\left(\dfrac{21}{2}\right)^2+12^2-\left(\dfrac{15}{2}\right)^2}{2\times\dfrac{21}{2}\times 12}=\dfrac{11}{14}\Rightarrow\sin\angle ACB=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

而$\cos\angle BAC=\dfrac{\left(\dfrac{21}{2}\right)^2+\left(\dfrac{15}{2}\right)^2-12^2}{2\times\dfrac{21}{2}\times\dfrac{15}{2}}=\dfrac{1}{7}\Rightarrow\sin\angle BAC=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

解：因為$\overline{AD}$平分$\angle BAC$，故令$\overline{AB}=5t$、$\overline{AC}=7t$

由「正弦定律」知ΔABC中：$\dfrac{5t}{\sin\angle ACB}=\dfrac{7t}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\sin\angle ACB=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$\sin\angle BAC=\sin(180^\circ-B-C)=\sin(B+C)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{11}{14}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

由「正弦定律」知ΔABC中：$\dfrac{\overline{AB}}{\dfrac{5\sqrt{3}}{14}}=\dfrac{12}{\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}\Rightarrow\overline{AB}=\dfrac{15}{2}$

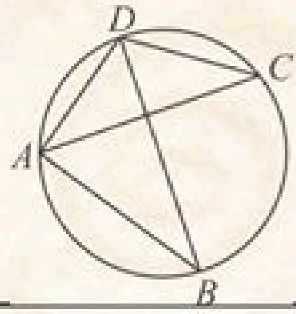
10. 設 A,B,C,D 為圓上的相異四點。

已知圓的半徑為 $\dfrac{7}{2}$，$\overline{AB}=5$，

兩線段 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直，

如圖所示(此為示意圖，非依實際比例)。

則 $\overline{CD}$ 的長度為__________。(化為最簡根式)。【107 數甲】



答：$2\sqrt{6}$

解：正弦定律 $\dfrac{5}{\sin\angle ADB}=2\times\dfrac{7}{2}\quad\Rightarrow\sin\angle ADB=\dfrac{5}{7}$

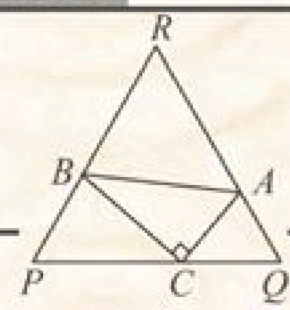
$\xrightarrow{\overline{AC}\perp\overline{BD}}\sin\angle CAD=\cos\angle ADB=\dfrac{\sqrt{24}}{7}$

正弦定律 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle CAD}=2\times\dfrac{7}{2}\quad\Rightarrow\overline{CD}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 如圖，ΔPQR 為正三角形，A、B、C 分別落在 $\overline{QR}$、$\overline{PR}$、$\overline{PQ}$ 邊上，且 ΔABC 中，$\angle ACB=90°$。若 $\overline{AQ}=8$，$\overline{PB}=\overline{CQ}=10$，則 $\overline{PC}=$__________。

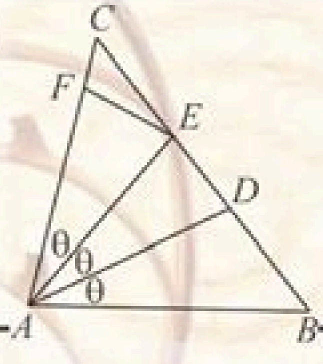
【北模】



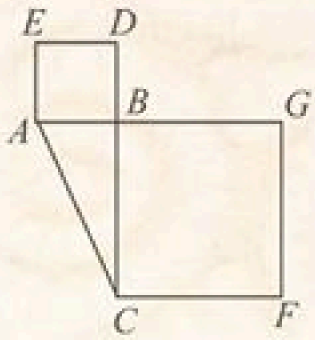
2. 如右圖，等腰 ΔABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle BAD=\angle DAE=\angle EAC=\theta$，且 $\overline{AE}=\overline{AF}$，選出正確的選項：

(1) $\overline{CE}=\overline{ED}$　(2) $\overline{BD}>\overline{ED}$　(3) $\angle CFE=90°+\dfrac{\theta}{2}$

(4) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=2\cos\theta-1$　(5) $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BD}}=2\sin 2\theta-1$。【全國學測模】

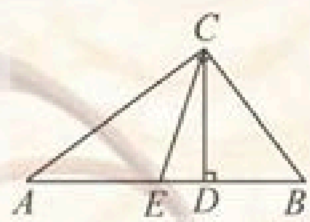


3. 如圖所示，平面上的 ΔABC 中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\angle B=90^\circ$，分別以 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 為一邊向外作正方形 $ABDE$ 、$BCFG$。若 ΔADG 、ΔCDG 、ΔEBG 的外接圓半徑分別為 R_1、R_2、R_3，試問 R_1、R_2、R_3 的大小關係為何？



(1) $R_1<R_2<R_3$　(2) $R_2<R_1<R_3$　(3) $R_1=R_2<R_3$
(4) $R_3<R_1=R_2$　(5) $R_3<R_1<R_2$。【台中區學測模】

4. 如圖，ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，點 E 在 $\overline{AB}$ 上，請選出正確的選項：



(1) $\cos\angle ACD=\dfrac{4}{5}$
(2)若 E 為 $\overline{AB}$ 中點，則 $\sin\angle CEB$ ： $\sin\angle ECB=6$ ： 5
(3)若 E 為 $\overline{AB}$ 中點，則 $\sin\angle CEB=\dfrac{24}{25}$　(4)若 $\overline{CE}$ 為 $\angle ACB$ 的角平分線，則 $\overline{CE}=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$
(5) $(\Delta ACE$ 外接圓半徑 $)$ ： $(\Delta BCE$ 外接圓半徑 $)=4$ ： 3。

【全國模】

5. 已知 A、B、C、D 在同一平面上，

在 ΔABC 中，已知 $4\sin A-\sin B=3$ 且 $4\cos A+\cos B=2\sqrt{3}$。

若 ΔABC 外有一點 D 滿足 $\overline{DA}\perp\overline{AC}$，$\overline{DB}\perp\overline{BC}$，且 $\overline{CD}=10$，

則下列哪些是正確的選項？

(1) $\cos(A+B)=\frac{1}{2}$　(2) $\angle C$ 為銳角　(3) $\overline{AB}=5\sqrt{2}$　(4) ΔABC 外接圓面積為 25π

(5) $\overline{AD}\times\overline{BC}+\overline{AC}\times\overline{BD}=50\sqrt{3}$。　【中區模】

6. 假設 ΔABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 對邊的邊長分別為 a、b、c，且 $b=\sqrt{18}$，$c=4$，$\angle C=45^\circ$，關於下列 ΔABC 的邊角關係，選出正確選項：

(1) $\frac{17}{2}<\overline{BC}<9$　(2) $\sin B>0.7$　(3) ΔABC 的外接圓半徑為 $4\sqrt{2}$　(4) $\angle A$ 必為銳角

(5) ΔABC 面積必為 $6\sqrt{2}$。　【全國學測模】