

# 俞克斌杯

## 的核心 100 for 2019 大學入試學測 (2) 無理數運算

### 【觀念核心】

- ① 不能表成有理數結構之實數，稱作『無理數 ( $\bar{Q}$ )』
- (1)  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{5}$ 、 $\pi$ 、 $e$ 、 $\log 7$ 、...均為無理數（沒有固定型態）
  - (2) 無理數只能化為不循環的無限小數
  - (3) 兩個無理數的加、減、乘、除的結果不一定仍是無理數
  - (4) 只有平方根型的無理數（如： $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 、...）可以尺規作圖
- ② 雙重根號拆解： $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ，其中  $a > b > 0$
- ③ 歸謬證明法：先作相反假設、進行合理推論、產生矛盾結果
- ④ 有理數無理數互斥獨立性： $a+b\sqrt{e} = c+d\sqrt{e} \xrightarrow{a,b,c,d \in Q, \sqrt{e} \in \bar{Q}} a=c, b=d$
- ⑤ 乘法公式：
- (1) 平方乘法公式：  
平方差： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。  
完全平方和： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。  
完全平方差： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。
  - (2) 立方乘法公式：  
立方和： $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 。  
立方差： $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 。  
完全立方和： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。  
完全立方差： $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。
  - (3) 補充公式：  
①  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ 。  
②  $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$ 。  
③  $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$ 。

### 【鑑往核心】

1.  $\sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2}} + 1$  等於下列哪一個選項？

- (1) 1.01    (2) 1.05    (3) 1.1    (4) 1.15    (5) 1.21

【101 學測】

答：(2)

解：  $\sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4^2} + 1} = \sqrt{\frac{16+25+400}{400}} = \sqrt{\frac{441}{400}} = \frac{21}{20} = 1.05$

2. 設  $k$  為一整數。已知  $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則  $k =$  \_\_\_\_\_。

【102 學測】

答：16

解：  $k < 3\sqrt{31} < k+1 \Rightarrow k^2 < 279 < (k+1)^2 \xrightarrow{16^2=256, 17^2=289} k=16$

3. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1)  $\sqrt{13} > 3.5$

(2)  $\sqrt{13} < 3.6$

(3)  $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$

(4)  $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$

(5)  $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$

【103 學測】

答：(1)(4)

解：(1)  $13 > 12.25$ ，故  $\sqrt{13} > 3.5$  (2)  $13 > 12.96$ ，故  $\sqrt{13} > 3.6$

(3)  $(\sqrt{13})^2 < (\sqrt{10} + \sqrt{3})^2$ ，故  $\sqrt{13} - \sqrt{3} < \sqrt{10}$

(4)  $(\sqrt{13} + \sqrt{3})^2 > (\sqrt{16})^2$ ，故  $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$

(5)  $(\sqrt{13} + \sqrt{3})^2 < 6^2$ ，故  $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} < \frac{6}{10}$

### 【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 若  $a = \sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ ， $b = \sqrt{6} + \sqrt{11}$ ， $c = \sqrt{3} \times \sqrt{11}$ ，

則  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小滿足下列哪一個選項？

(1)  $a < b < c$  (2)  $a < c < b$  (3)  $b < c < a$  (4)  $b < a < c$  (5)  $c < a < b$

2. 設  $m$  為  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-0.25}$  的小數部分，則  $\sqrt{m^3 + \frac{1}{m^3} + 27}$  最接近下列哪一個整數？

(1)4 (2)5 (3)6 (4)7 (5)8。

【中女中學測模】

3. 已知  $a = \frac{\sqrt{4+\sqrt{12}}}{2}$ 、 $b = \frac{\sqrt{7+\sqrt{48}}}{3}$ 、 $c = \frac{\sqrt{21+\sqrt{432}}}{5}$ 。

則  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小關係為何？

- (1)  $a > b > c$  (2)  $a > c > b$  (3)  $c > a > b$  (4)  $c > b > a$  (5)  $b > c > a$ 。 [ 中文中學測模 ]

4. 設  $a$ 、 $b$  為有理數，且  $27 \cdot 3^{a\sqrt{3-\sqrt{8}}+b\sqrt{8}} = 1$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1)  $a = -3$  (2)  $b = -\frac{3}{2}$  (3)  $b$  無解 (4)  $a - 2b = 6$  (5)  $2a + b = 0$

5. 若正實數  $x$ 、 $y$  滿足  $1 < x < y$ ，則  $\sqrt{x+y-2\sqrt{xy+x-y-1}}$  可化簡成下列哪一個選項？

- (1)  $\sqrt{x-1} - \sqrt{y+1}$  (2)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1}$  (3)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{y-1}$   
 (4)  $\sqrt{y-1} - \sqrt{x+1}$  (5)  $\sqrt{y+1} - \sqrt{x-1}$ 。