

# 俞克斌杯

## 的核心 100 for 2019 大學入試學測 (3) 算幾不等式

### 【觀念核心】

① 若  $a \geq 0$  且  $b \geq 0$ ，則算術平均數  $\geq$  幾何平均數，即  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，

其中等號成立的條件是  $a=b$ 。

② 設  $a_1, a_2, \dots, a_n$  為  $n$  個非負實數，則  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

其中等號成立的條件是  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

### 【鑑往核心】

1. 平面上兩點  $A, B$  之距離為 5，以  $A$  為圓心做一半徑為  $r$  ( $0 < r < 5$ ) 的圓  $\Gamma$ ，過  $B$  做圓  $\Gamma$  的切線，切點 (之一) 為  $P$ 。

當  $r$  變動時， $\triangle PAB$  的面積最大可能值為 \_\_\_\_\_。(化為最簡分數) [107 學測]

答：  $\frac{25}{4}$

解：  $r^2 + x^2 = 5^2$  算幾不等式  $\rightarrow \frac{r^2 + x^2}{2} \geq \sqrt{r^2 x^2} \Rightarrow \frac{25}{4} \geq \frac{1}{2} r \cdot x$  ( $\triangle PAB$  面積)

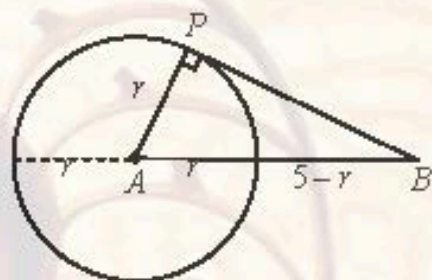
解：  $\triangle PAB$  的面積  $= \frac{1}{2} r \cdot \sqrt{25-r^2} = \frac{1}{2} \sqrt{r^2(25-r^2)}$

算幾不等式  $\rightarrow \leq \frac{1}{2} \times \frac{r^2 + (25-r^2)}{2} = \frac{25}{4}$

解：  $\overline{PB} = \sqrt{(5-r)(5+r)}$

$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(5-r)(5+r)} \times r = \frac{1}{2} \sqrt{-r^4 + 25r^2}$

配方法  $\rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{-\left(r^2 - \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{625}{4}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{25}{2} = \frac{25}{4}$



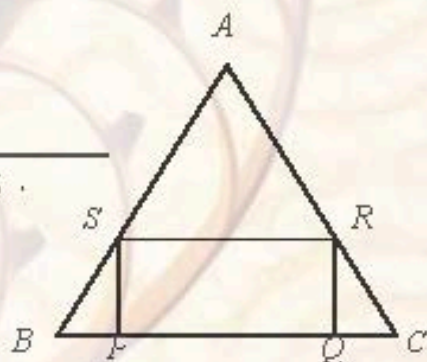
2. 如圖所示， $PQRS$  為一給定的矩形，長  $\overline{PQ} = 12$ 、寬  $\overline{QR} = 5$ 。

而  $\triangle ABC$  為等腰三角形，其中  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。

$P, Q$  在  $\overline{BC}$  邊上， $R, S$  分別在  $\overline{CA}, \overline{AB}$  邊上。

則當  $\triangle ABC$  中  $\overline{BC}$  邊上的高為 \_\_\_\_\_ 時，

$\triangle ABC$  的面積最小。 [100 數甲]



答：10

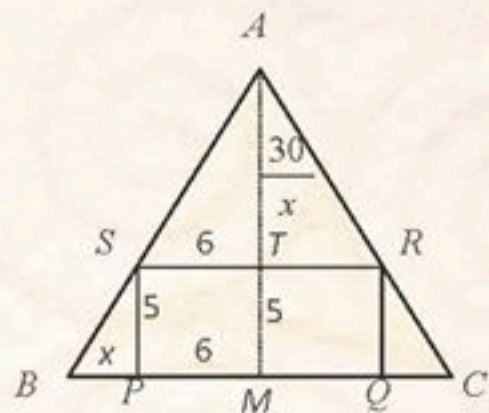
解：設  $\overline{BP} = x$ ， $\overline{BC}$  邊上的高  $h$

$$\text{則 } \frac{5}{x} = \frac{h-5}{6} \Rightarrow h = 5 + \frac{30}{x}$$

$$\Delta ABC \text{ 面積} = \frac{(12+2x)\left(5+\frac{30}{x}\right)}{2} = 30 + 5x + \frac{180}{x} + 30$$

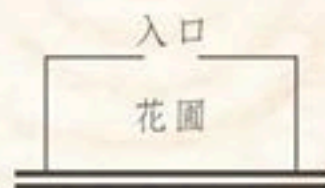
$$\geq 2\sqrt{5x \cdot \frac{180}{x}} + 60 = 60 + 60 = 120$$

$$\text{等號成立時機：} 5x = \frac{180}{x} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \text{高 } h = 5 + 5 = 10$$



### 【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

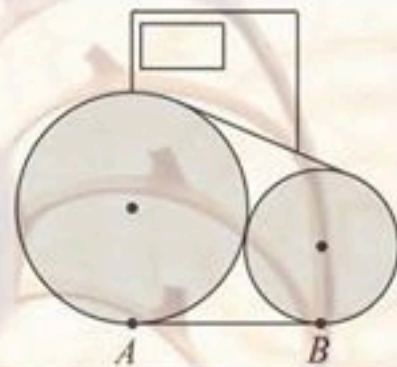
1. 楓兒想沿著校園的圍牆邊，用「口」字型的竹籬圍成一塊花園(如圖)；若竹籬的長度是 26 公尺，並在其中一邊正中央留著寬 3 公尺的出入口。則此花園的最大面積為\_\_\_\_\_平方公尺。(化為最簡分數)



【2019 年 10 月最新模擬考（中區模）】

2. 阿呆想要製作一臺工程車模型，同側的兩個輪子相切並用履帶包覆，其側面示意圖如右。若這兩個輪子的面積和為  $50\pi$  平方公分，則接觸地面之履帶（即  $\overline{AB}$ ）長度的最大值為\_\_\_\_\_公分。

【2019 年 10 月最新模擬考（北區模）】

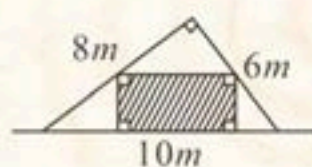


3. 在數線的正向上有三點  $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $P(6)$ ，已知  $P$  在線段  $AB$  之間且  $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$ ，請問  $ab$  的最大值為下列哪一個選項？

(1)  $\frac{75}{2}$     (2)  $\frac{6}{25}$     (3)  $\frac{36}{25}$     (4) 30    (5)  $\frac{25}{6}$ 。

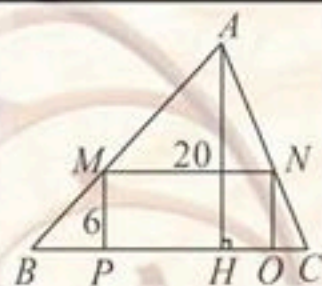
【全國】

4. 如圖，有一塊三邊長為 6、8、10 公尺的直角三角形形狀的空地，今欲在此空地中蓋房子，房子地基為矩形，且此房子地基的一邊是在三角形的斜邊上，則此地基的最大面積為\_\_\_\_\_平方公尺。



【中區模】

5. 如圖所示， $\triangle ABC$  中， $\overline{AH}$  為  $\overline{BC}$  邊上的高，已知一矩形  $MNOP$ ，其中  $M$ 、 $N$  分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  邊上， $P$ 、 $Q$  在  $\overline{BC}$  邊上， $\overline{MN} = 20$ 、 $\overline{MP} = 6$ ， $H$  在  $\overline{PO}$  上且滿足  $\overline{PH} : \overline{HO} = 3 : 1$ ，則  $\triangle ABC$  的最小面積為\_\_\_\_\_。 【中女中學測模】



6. 一車主購買車輛時花費 60 萬元，每年的保險費汽油費共 6 萬元，而每年的維修費是一個公差為 1.2 萬元的等差數列，且第一年的維修費為 1.2 萬元。若該車主以「使用多少年的年平均費用最少」作為申請車輛報廢年限的依據，則該車的使用年限為\_\_\_\_\_年。

[學測模]

7. 已知  $a \geq b > 1$ ，求  $\log_b \left( \frac{b^5}{a} \right) + \log_a \left( \frac{a^4}{b} \right)$  的最大值為\_\_\_\_\_。

[台北區聯合學測模擬考]

8. 設  $x > 0$ ， $y > 0$ ，且  $x + 2y = 3$ ，則下列敘述哪些是正確的？

- (1) 當  $(x, y) = (1, 1)$  時， $xy$  有最大值 (2) 當  $(x, y) = \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{4} \right)$  時， $xy$  有最大值  
(3) 當  $(x, y) = \left( 2, \frac{1}{2} \right)$  時， $2^x + 4^y$  有最小值 (4) 承(3)， $2^x + 4^y$  的最小值為  $4\sqrt{2}$   
(5) 當  $(x, y) = \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{4} \right)$  時， $1 + \log_2 x + \log_2 y$  有最大值

9.  $f(x) = x^2 + 3x + k$  的最小值為  $-1$ ， $g(x) = 2x^2 + ax + 7$  的最小值為  $b$ ，  
其中  $a$  為變數且  $a \in \mathbb{R}$ ，請選出正確的選項：

(1)  $k = \frac{5}{4}$

(2)  $f(x) + \frac{2}{f(x)}$  的最小值  $= 2\sqrt{2}$

(3) 如果  $f(x) + g(x)$  的最小值  $= -1 + b$ ，則  $a = 6$

(4) 對任何  $a$ ， $f(x) \cdot g(x)$  的最小值  $= -b$

(5) 對任何  $a$ ， $f(x) - g(x)$  在實數上有最大值。



俞克斌數學

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利