



俞克斌杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測

(5) 虛數複數

【觀念核心】

① 虛數：

(1) $\sqrt{-1} = i$ ，並滿足 $i^2 = -1$ ， i 稱為虛數單位。故 $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$

(2) 當 $a > 0$ ，規定 $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times i$ 。

(3) i 的運算循環性：設 n 為一正整數，則

$$i^{n+1} = i, i^{n+2} = -1, i^{n+3} = -i, i^{n+4} = 1。$$

(4) 乘法合併：當 $a < 0, b < 0$ 時， $\sqrt{a} \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 。其餘狀況， $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(5) 除法合併：當 $a > 0, b < 0$ 時， $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 。其餘狀況， $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 。

② 複數：

(1) 設 a, b 為實數，形如 $a+bi$ 的數稱為複數，其中 a 稱為它的實部， b 稱為它的虛部。

虛部 $b \neq 0$ 的複數稱為虛數。

實部 $a = 0$ 的虛數，即 bi ，稱為純虛數。虛部 $b = 0$ 的複數就是實數。

$a+bi = c+di \Rightarrow a=c, b=d$ 的成立條件是 a, b, c, d 皆為實數

(2) 複數的運算：

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i。$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i。$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}。$$

(3) 共軛複數：

設 a, b 為實數，若 $z = a+bi$ ，則我們稱 $\bar{z} = a-bi$ 為 z 的共軛複數。

(4) 共軛複數的性質：若 a, b 為實數， z_1, z_2 為複數，則

$$\overline{az} = a\bar{z}, \overline{(\bar{z})} = z。$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2。$$

設 n 為正整數，則 $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ 。

設 $z = a+bi$ 為複數，則 $z + \bar{z} = 2a, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ 。

【鑑往核心】

1. 設 a, b 為實數且 $(a+bi)(2+6i) = -80$ ，其中 $i^2 = -1$ 。則 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[102 學測]

答： $(a, b) = (-4, 12)$

解：實部 $2a-6b=-80 \Rightarrow a-3b=-40$
虛部 $6a+2b=0 \Rightarrow 3a+b=0$
故 $a=-4$ 、 $b=12$

2. 複數 $(-2+\sqrt{3}i)^4$ 的實部為_____。

[76 日社]

答：-47

解：所求 $= \left[(-2+\sqrt{3}i)^2 \right]^2 = \left[(1-4\sqrt{3}i) \right]^2 = -47-8\sqrt{3}i$ \therefore 實部為 -47

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 設 a 為實數，已知 \bar{Z} 為 Z 的共軛複數，且 $Z = \frac{7-2i}{5-ai}$ ，若 $\bar{Z} = Z$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. $x, y \in R$ ，若 $(x+3i)(\overline{y+i}) = 3i-4xi-1$ ，求 $\left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} \right)^2 = ?$

俞克斌
數學

3. 關於複數 a 、 b 的運算性質，下列敘述何者正確？

- (1) 若 $a^2 < 0$ ，則 $a + \bar{a} = 0$
- (2) 若 $a + b > 0$ ， $ab > 0$ ，則 $a > 0$ ， $b > 0$
- (3) 若 $a + bi = 3 - 4i$ ，則 $a = 3$ ， $b = -4$
- (4) 若 $a^2 > b^2$ ，則 $a^2 - b^2 > 0$
- (5) 若 $a^2 - b^2 > 0$ ，則 $a^2 > b^2$ 。



俞克斌數學

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利