俞克斌杯杯的核心 100 *for* 2019 大學入試學測

(8) 二次函數（標準式）

【觀念核心】

1.二次函數 $y=ax^2$ 的圖形：

若 $a\neq 0$ 為一實數，則二次函數 $y=ax^2$ 為一拋物線，其頂點為 $(0,0)$ 且對稱於 y 軸。

(1)當 $a>0$，則拋物線開口向上。

(2)當 $a<0$，則拋物線開口向下。

(3)當 $|a|$ 越大，則拋物線的開口越小。

2.二次函數圖形的平移：

二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形為 $y=ax^2$ 的圖形

沿 x 軸方向移動 h 單位；沿 y 軸方向移動 k 單位所得。

(1)當 $h>0$，則向右平移 h 單位；當 $h<0$，則向左平移 $|h|$ 單位。

(2)當 $k>0$，則向上平移 k 單位；當 $k<0$，則向下平移 $|k|$ 單位。

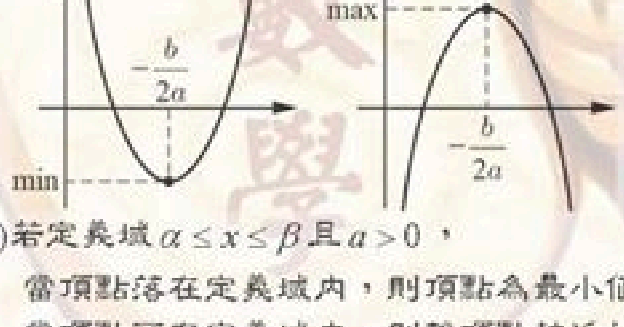
3.二次函數的極值：

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 利用配方法可得 $y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$，

其中頂點為 $(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$。

(1)若 $a>0$，則當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時，二次函數有最小值 $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$。

(2)若 $a<0$，則當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時，二次函數有最大值 $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$。



(3)若定義域 $\alpha\leq x\leq\beta$ 且 $a>0$，

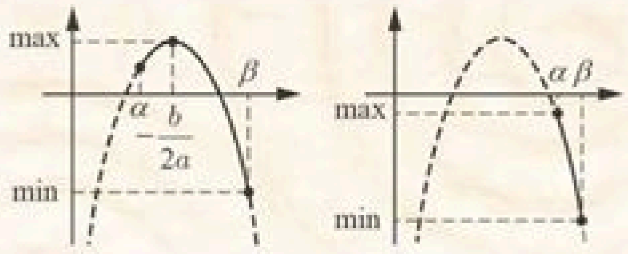
當頂點落在定義域內，則頂點為最小值，離頂點較遠的端點為最大值；

當頂點不在定義域內，則離頂點較近的端點為最小值，離頂點較遠的端點為最大值。

(4)若定義域 $\alpha\leq x\leq\beta$ 且 $a<0$，

當頂點落在定義域內，則頂點為最大值，離頂點較遠的端點為最小值；

當頂點不在定義域內，則離頂點較近的端點為最大值，離頂點較遠的端點為最小值。



【鑑往核心】

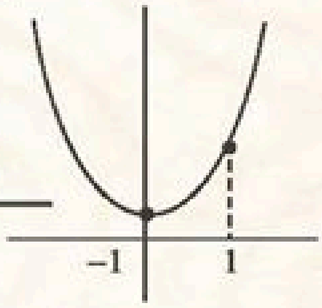
1. 設$f(x)$為二次實係數多項式，已知$f(x)$在$x=2$時有最小值 1 且$f(3)=3$。
請問$f(1)$之值為下列哪一選項？
(1) 5　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 條件不足，無法確定　【105 學測】

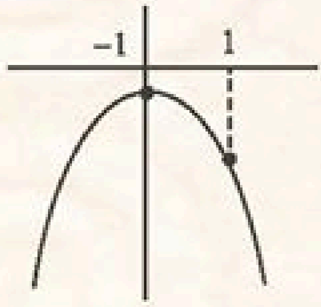
答：(3)

解：$f(x)=a(x-2)^2+1 \xrightarrow{\text{過}(3,3)} a+1=3 \Rightarrow a=2$
$f(x)=2(x-2)^2+1 \Rightarrow f(1)=3$

解：二次函數對稱軸$x=2$，過$(3,3)$，必過$(1,3)$

2. 設二次實係數多項式函數$f(x)=ax^2+2ax+b$
在區間$-1\le x\le 1$上的最大值為7、最小值為3，
試求數對(a,b)的所有可能值。
【101 數乙】





答：$(1,4)$或$(-1,6)$

解：$f(x)=a(x+1)^2+[-a+b]$，
表對稱軸為$x=-1$
若$a>0$，最小值$f(-1)=-a+b=3$、最大值$f(1)=3a+b=7 \Rightarrow a=1$，$b=4$
若$a<0$，最小值$f(1)=3a+b=3$、最大值$f(-1)=-a+b=7 \Rightarrow a=-1$，$b=6$

3. 已知實係數二次多項式函數$y=f(x)$滿足$f(3)=f(-7)$。試回答下列問題。
(1)寫出$y=f(x)$圖形的對稱軸方程式。(3 分)
(2)若$f(x)=a(x-k)^2+b$，且$y=f(x)$的圖形與x軸交於相異兩點，
試判斷ab乘積的值為正或負，並請說明理由。(4 分)
(3)若方程式$f(x)=0$有相異實根 試證兩根之積小於4。(6 分)　【107 數乙】

答：(1)$x=-2$　(2)$ab<0$　(3)如詳解

解：(1)對稱軸$x=\dfrac{3+(-7)}{2}=-2$

(2) $y=a(x+2)^2+b$與x軸交於2點

畫圖即知：$\begin{cases}\text{開口向上}a>0\text{，則極小值}b<0\\ \text{開口向下}a<0\text{，則極大值}b>0\end{cases}$，故$ab<0$

(2) $y=a(x+2)^2+b=ax^2+4ax+(4a+b)$與$x$軸交於2點
判別式：$(4a)^2-4a(4a+b)>0 \Rightarrow -4ab>0$，故$ab<0$

(3)兩根$-2+\sqrt{\dfrac{-b}{a}}$、$-2-\sqrt{\dfrac{-b}{a}}$之積$=4-\left(\dfrac{-b}{a}\right)=4+\dfrac{b}{a}<4$，得證

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 設a、b為實數，且二次函數$f(x)=a(x-1)^2+b$滿足$f(0)<0$，$f(-1)>0$，
若方程式$f(x)=0$有兩個實根α、β，且$\alpha>\beta$，則下列哪一個選項是正確的？
(A) $-1<\alpha<0$ (B) $0<\alpha<1$ (C) $1<\alpha<2$ (D) $2<\alpha<3$ (E) $3<\alpha<4$

2. 設二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$，其中$a<0$，
若對於任意實數t，恆有$f(-3+t)=f(5-t)$，
則$f(0)$、$f(-2)$、$f(5)$的大小關係為下列哪一個選項？
(1) $f(-2)<f(0)<f(5)$ (2) $f(-2)<f(5)<f(0)$ (3) $f(0)<f(-2)<f(5)$
(4) $f(5)<f(-2)<f(0)$ (5) $f(5)<f(0)<f(-2)$

3. 有一手機遊戲『蛇魔之塔』，其遊戲內容為：
每次利用排列消除 3 顆以上的整數顆符石以進行攻擊。
其中有一個遊戲角色的攻擊力公式如下：攻擊力$=2000\times$倍率$\times(9-$消去符石數$)$；
消去符石數=每次消除的符石數量；倍率$=1+($消去符石數$-3)\times0.25$。
請問此遊戲角色在一次消除若干顆符石後，所能得到的最大攻擊力為________。
［學測模］

4. 設(a,b)在函數$y=-2x+3$上，若限制$-2\le a\le 1$，試求ab的最大值為？

(1) $\dfrac{3}{4}$　(2) 1　(3) $\dfrac{9}{8}$　(4) 7　(5) 14

5. 若實係數二次函數$f(x)=-x^2+ax+b$在$-2\le x\le 6$的範圍內，存在兩個相異的x值使$f(x)$有相同最小值-3，求數對________。