俞克斌杯杯的核心100 for 2019大學入試學測

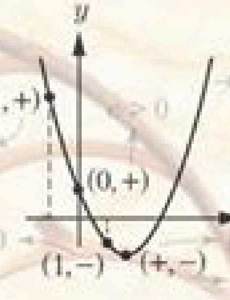
(9) 二次函數（一般式）

【觀念核心】

1.二次函數圖形的判斷：

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的係數皆為實數且 $a\neq 0$，則

	>0	<0	$=0$	註
a	開口向上	開口向下		$\lvert a\rvert$ 越大，開口越小
b	(1) $a>0$ 且頂點 $(-,)$ (2) $a<0$ 且頂點 $(+,)$	(1) $a>0$ 且頂點 $(+,)$ (2) $a<0$ 且頂點 $(-,)$	頂點 $(0,)$	頂點 $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$
c	圖形與 y 軸交於正向，即 $f(0)>0$	圖形與 y 軸交於負向，即 $f(0)<0$	$f(0)=0$	$f(0)=c$
b^2-4ac	(1) $a>0$ 且頂點 $(,-)$ (2) $a<0$ 且頂點 $(,+)$	(1) $a>0$ 且頂點 $(,+)$ (2) $a<0$ 且頂點 $(,-)$	頂點 $(,0)$	頂點 $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$
$a+b+c$	$f(1)>0$	$f(1)<0$	$f(1)=0$	$f(1)=a+b+c$
$a-b+c$	$f(-1)>0$	$f(-1)<0$	$f(-1)=0$	$f(-1)=a-b+c$



2.拋物線的恆正與恆負情況：

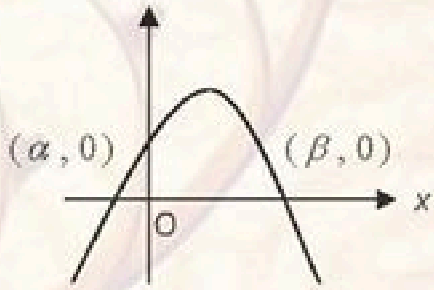
若 $f(x)=ax^2+bx+c$ 為二次函數 $(a\neq 0)$，且判別式 $D=b^2-4ac$，則

(1)當 $a>0$，且 $D<0$，則 $f(x)>0$ 恆成立。

(2)當 $a<0$，且 $D<0$，則 $f(x)<0$ 恆成立。

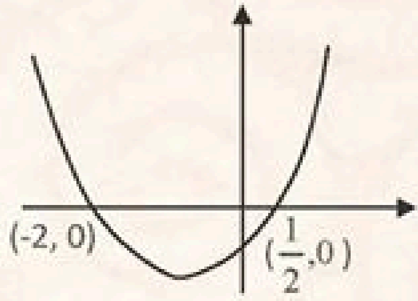
【鑑往核心】

1. 已知的圖形如下圖所示：
試問下列不等式何者成立？
(A) $a>0$　(B) $b>0$　(C) $c>0$
(D) $b^2-4ac>0$　(E) $\alpha+\beta>0$　【78日社】



答：(B)(C)(D)(E)

2. 若函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的點形如圖，
則下列各數那些為負數？
(A) a　(B) b　(C) c　(D) b^2-4ac　(E) $a-b+c$
【83 學測】



答：(C)(E)
解：由圖可知：$a>0$、$b>0$、$c<0$、$D>0$
$f(-1)=a-b+c<0$

3. 考慮實數 a、b、c，其中 $a\neq 0$。令 Γ 為 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形。
試選出正確的選項：
(1)若 $a>0$，則 Γ 會通過第一象限　(2)若 $a<0$，則 Γ 會通過第一象限
(3)若 $b^2-4ac>0$，則 Γ 會通過第一象限　(4)若 $c>0$，則 Γ 會通過第一象限
(5)若 $c<0$，則 Γ 會通過第一象限。
【106 數乙】

答：(1)(4)
解：(2)可能只通過 3、4 象限　(3)可能只通過 2、3、4 象限　(5)可能只通過 3、4 象限

4. 遞迴數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n=a_{n-1}+f(n-2)$，其中 $n\geq 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。
若 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=12$，則 $a_5=$________。
【106 學測】

答：25
解：因為 $f(x)$ 為二次多項式，可令 $f(x)=ax^2+bx+c$

由題意知 $\begin{cases} a_2=a_1+f(0) \\ a_3=a_2+f(1) \\ a_4=a_3+f(2) \\ a_5=a_4+f(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=c \\ 3=a+b+c \\ 7=4a+2b+c \\ a_5-12=9a+3b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=1 \\ a=1 \\ a_5=25 \end{cases}$

5. 假設 a、b 皆為非零實數，且座標平面上二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。
(1) 在 x 軸上　(2) 在 y 軸上　(3) 在第一象限　(4) 在第四象限
(5) 當 $a>0$ 時，在第一象限；當 $a<0$ 時，在第四象限
【105 數甲】

答：(1)
解：相切，就是交於一點。而看到「交」，就想到「解聯立」，且「判別式 = 0（重根）」

$\begin{cases} y=ax^2+bx \\ y=ax+b \end{cases} \Rightarrow ax^2+(b-a)x-b=0$，

其判別式 $(b-a)^2+4ab=0 \Rightarrow (b+a)^2=0 \Rightarrow b=-a$，代回 $ax^2+(b-a)x-b=0$
故得 $ax^2-2ax+a=a(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=0$，表示切點為 $(1,0)\in x$ 軸

6. 坐標平面上，
若直線 $y=ax+b$（其中 a,b 為實數）與二次函數 $y=x^2$ 的圖形恰交於一點，
亦與二次函數 $y=(x-2)^2+12$ 的圖形恰交於一點，
則 $a=$______，$b=$______。 【103學測】

答：$a=6$，$b=-9$

解：$y=ax+b$ 與 $y=x^2$ 恰交於一點，故 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-ax-b=0$ 恰有一解

則判別式 $=(-a)^2-4\times1\times(-b)=0$

$y=ax+b$ 與 $y=(x-2)^2+12$ 恰交於一點，

故 $\begin{cases} y=ax+b \\ y=(x-2)^2+12 \end{cases} \Rightarrow x^2-(4+a)x+(16-b)=0$ 恰有一解

則判別式 $=(4+a)^2-4\times1\times(16-b)=0$

$\Rightarrow a=6$，$b=-9$

7. 設 $a<b<c$。
已知實係數多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，
且與 x 軸交於 $(a,0)$、$(b,0)$ 兩點；
實係數多項式函數 $y=g(x)$ 的圖形亦為一開口向上的拋物線，
且跟 x 軸相交於 $(b,0)$、$(c,0)$ 兩點。
請選出 $y=f(x)+g(x)$ 的圖形可能的選項。
(1) 水平直線
(2) 和 x 軸僅交於一點的直線
(3) 和 x 軸無交點的拋物線
(4) 和 x 軸僅交於一點的拋物線
(5) 和 x 軸交於兩點的拋物線 【102學測】

答：(4)(5)

解：$f(x)=p(x-a)(x-b)$、$g(x)=q(x-b)(x-c)$，其中 p、q 均為正數

$f(x)+g(x)=(x-b)[(p+q)x-pa-qc]$，其中 $p+q>0$

表 $f(x)+g(x)=0$ 必有兩解，$x=b$、$x=\dfrac{pa+qc}{p+q}$

當 $b=\dfrac{pa+qc}{p+q}$，圖形為與 x 軸交於一點的拋物線

當 $b\neq\dfrac{pa+qc}{p+q}$，圖形為與 x 軸交於兩點的拋物線

8. 令 $A(-2,0)$、$B(0,1)$、$C(2,1)$、$D(4,3)$ 為坐標平面上四點。請選出正確的選項。
(1) 恰有一直線通過 A、B、C 三點
(2) 恰有一圓通過 A、B、D 三點
(3) 恰有一個二次多項式函數的圖形通過 B、C、D 三點
(4) 恰有一個三次多項式函數的圖形通過 A、B、C、D 四點
(5) 可找到兩平行直線，其聯集包含 A、B、C、D 四點 【102數甲】

答：(3)(4)(5)

解：(1) 斜率$m_{AB}=\dfrac{1}{2}\neq$斜率$m_{BC}=\dfrac{0}{2}$，無法決定一直線

(2) 斜率$m_{AB}=\dfrac{1}{2}=$斜率$m_{BD}=\dfrac{2}{4}$，無法決定一圓

(3) B,C,D可決定二次函數$y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$

(4) A,B,C,D可決定三次函數$y=\dfrac{1}{16}x^3-\dfrac{1}{8}x^2+1$

(5) 一直線過A、B、D三點，另一平行直線過C點

析：一個n次多項函數，會被$n+1$個相異x值點，唯一決定。

解析幾何的說法就是：(x_i,y_i)是平面上點P_i坐標，

給了平面上的$n+1$個點P_0、P_1、…、P_n，其橫坐標兩兩相異，

只能找到一條代表n次多項式的曲線通過這些點。

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 設k為實數，若不論x為任意實數，二次式kx^2+2x-2的值恆小於 2，求k的範圍為________。

2. $a\in R$，二次不等式$ax^2-2ax+(2a-3)<0$，若此不等式無實數解，求a之範圍為________。

3. 不論a為任何實數，$(x-6)(x-2)+a(x-b)=0$之根恆為實根，
求b之範圍為________。

4. 設二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$，其中$a<0$且$x\in R$，若$f(\alpha)=f(\beta)=0$，且$\alpha>\beta$，問下列何者正確？
(1) 若$\beta<x<\alpha$，則$f(x)>0$　(2) 若$x>\beta$，則$f(x)<0$　(3) $f(5\alpha-4\beta)<0$
(4) $f\left(\dfrac{3\alpha+\beta}{4}\right)>0$　(5) $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$是最小值。

5. 等差數列$\langle a_n \rangle$前n項和為S_n，$n\in N$，
若函數$f(x)=ax^2+bx+c$的圖形恆過點(n,S_n)，且$S_4=24$，$a_3=7$，
則下列哪些選項是正確的？
(1) $a+b+2c=3$　(2) 函數$f(x)$的圖形不經過第四象限
(3) $f(4)=f(8)$　(4) 函數$f(x)$的最小值是-2
(5) $x>0$時，函數$f(x)$與$g(x)=2x+2$的圖形交於一點

6. 坐標平面上，有一直線L：$y=mx$與二次函數$f(x)=x^2+4x+1$，已知L的圖形恆在$f(x)$圖形的下方，則m值可能為下列哪些選項？
(1)1　(2)3　(3)5　(4)7　(5)9。

【2019 最新學測模】