

俞克斌杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測 (10) 高次函數

【觀念核心】

1. 單項函數：

- (1) 偶函數：當函數 $y = f(x)$ 對任意 x 均滿足 $f(x) = f(-x)$ ，此時圖形對稱於 y 軸。
- (2) 奇函數：當函數 $y = f(x)$ 對任意 x 均滿足 $f(-x) = -f(x)$ ，此時圖形對稱於原點。
- (3) 當 $0 < x < 1$ ，則次方越大數值越小： $n > m \Rightarrow x^n < x^m$ 。
- (4) 當 $x > 1$ ，則次方越大數值越大： $n > m \Rightarrow x^n > x^m$ 。



2. 單調函數：

- (1) 設 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ，若 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，則稱函數 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 遞增。
 - (2) 設 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ，若 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，則稱函數 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 遞減。
 - (3) 若對任意兩相異數 $x_1 < x_2$ ，都滿足 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，則稱函數 $f(x)$ 遞增。
 - (4) 若對任意兩相異數 $x_1 < x_2$ ，都滿足 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，則稱函數 $f(x)$ 遞減。
- 遞增或遞減的函數都稱為單調函數。

【鑑往核心】

1. 設 m 、 n 為小於或等於 4 的相異正整數且 a 、 b 為非零實數。

已知函數 $f(x) = ax^m$ 與函數 $g(x) = bx^n$ 的圖形恰有 3 個相異交點，請選出可能的選項：

- (1) m 、 n 皆為偶數且 a 、 b 同號 (2) m 、 n 皆為偶數且 a 、 b 異號
 (3) m 、 n 皆為奇數且 a 、 b 同號 (4) m 、 n 皆為奇數且 a 、 b 異號
 (5) m 、 n 為一奇一偶。

[106 學測]

答：(1)(3)

解：不失一般性，可假設 $m > n$ 且 m 、 n 均為小於或等於 4 的正整數

$$f(x) = ax^m \text{ 與 } g(x) = bx^n \text{ 恰有 3 個相異交點} \Rightarrow \underbrace{x^n}_{\substack{\text{重根,} \\ \text{僅有} \\ \text{一交點}}} \left(\underbrace{ax^{m-n} - b}_{\substack{\text{尚有 2 交點,} \\ \text{故必為二次} \\ \text{且為相異實根}}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x^{m-n} = \frac{b}{a}, \text{ 故 } m-n=2 \text{ 且 } \frac{b}{a} > 0$$

(1) m 、 n 皆為偶數且 a 、 b 同號 (3) m 、 n 皆為奇數且 a 、 b 同號

【知來核心 (含 108 學年度最新完整模擬考彙整)】

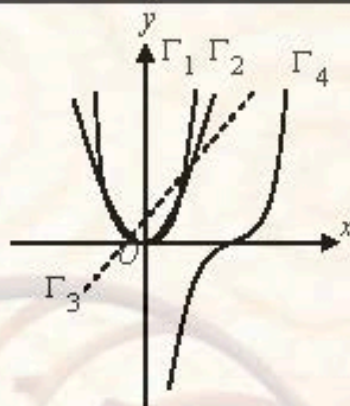
1. 右圖為四個函數 $f(x) = ax + b$ 、 $g(x) = ax^2$ 、

$$h(x) = (x-c)^3, t(x) = ax^4 + d.$$

其中 a 、 b 、 c 、 d 為實數且 $a \neq 0$ 。

試問下列選項何者正確？

- (A) $g(x)$ 與 $t(x)$ 皆為偶函數
 (B) Γ_2 為 $f(x)$ 的圖形
 (C) $ab < 0$
 (D) $c < 0$
 (E) $d = 0$



2. 若點 (a, b) 在 $y = x^3$ 的圖形上，則下列哪些點必在 $y = (x+1)^3 + 2$ 的圖形上？

(A) $(a-1, b+2)$

(B) $(a+1, b+2)$

(C) $(a-1, b-2)$

(D) $(-a+1, -b+2)$

(E) $(-a-1, -b+2)$

3. 下列何者正確？

(1) 若 (α, β) 在 $y = \alpha x^3$ 的圖形上，則 $(\alpha, 2\beta)$ 在 $y = 2\alpha x^3$ 的圖形上

(2) 若 (α, β) 在 $y = \alpha x^3$ 的圖形上，則 $(\alpha+1, \beta+1)$ 在 $y = \alpha(x+1)^3 + 1$ 的圖形上

(3) 若 (α, β) 在 $y = \alpha x^3$ 的圖形上，則 $(\alpha+3, \beta+2)$ 在 $y = \alpha(x-3)^3 + 2$ 的圖形上

(4) $y = 2x^3 + 1$ 之圖形對稱於原點

(5) $y = 2x^3 - x$ 之圖形可由 $y = 2x^3$ 之圖形平移而得。

試
數
學

4. 設 a 為不為零的實數， n 為正整數或零，定義形如 $f(x) = ax^n$ 的函數為單項函數，則下列哪些選項是正確的？
- (A) 單項函數的圖形均通過原點。
 - (B) 單項函數均為奇函數或偶函數。
 - (C) $f(x) = ax^3$ 與 $f(x) = -ax^3$ 的圖形對稱於 y 軸。
 - (D) 函數 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 9x + 4$ 向左平移 1 單位，再向下平移 7 單位後，會與函數 $f(x) = 3x^3$ 重合。
 - (E) 設 $f_1(x) = a_1x^4$, $f_2(x) = a_2x^4$, $f_3(x) = a_3x^4$ ，其中 a_1, a_2, a_3 均為不為零的實數，且滿足 $f_1(3) > f_2(3) > f_3(3)$ ，則 $|a_1| > |a_2| > |a_3|$ 。

俞克斌數學