俞克斌杯杯的核心100 for 2019大學入試學測
(11) 多項式的定義與運算

【觀念核心】

1. 多項式的定義：

　當n為正整數，且$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$為實數，$a_n \neq 0$，

　則$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$稱為$x$的$n$次多項式，

　其中a_n稱為首項係數或領導係數，a_k稱為k次項係數，a_0稱為常數項。

　係數全是整數的多項式稱為整係數多項式。

　係數全是有理數的多項式稱為有理係數多項式。

2.多項式的相等：

　兩個多項式$f(x)$和$g(x)$相等，

　則$f(x)$和$g(x)$的次數相等，且同次項的係數皆相等，記作$f(x)=g(x)$。

3.多項式的次數：

　多項式$f(x)$的最高次方用$\deg f(x)$表示

　(1)n次多項式表$\deg f(x)=n$。

　(2)常數多項式（零次多項式）表$\deg f(x)=0$，即僅有常數項，如$f(x)=3$。

　(3)零多項式即$f(x)=0$。

　(4)若$f(x)$和$g(x)$為非零多項式，則

　　$\deg(f(x)\pm g(x)) \leq max(\deg f(x), \deg g(x))$，其中$max(a,b)$表示$a,b$之中較大的數，

　　$\deg(f(x)+0)=\deg f(x)$。

　(5)若$f(x)$和$g(x)$為非零多項式，則$\deg(f(x)\times g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$。

　(6)若$f(x)$和$g(x)$為非零多項式，則$\deg(\dfrac{f(x)}{g(x)})=\deg f(x)-\deg g(x)$。

4.多項式的係數：

　設一多項式$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，則

　(1)常數項$=a_0=f(0)$。

　(2)各項係數的和$=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n=f(1)$。

　(3)偶次項係數的和$=a_0+a_2+a_4+\cdots=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$。

　(4)奇數項係數的和$=a_1+a_3+a_5+\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$

5.多項式的除法原理：

　多項式$f(x)$、$g(x)$，$g(x)\neq 0$都存在唯一一組$Q(x)$、$R(x)$

　使滿足$f(x)=g(x)\cdot Q(x)+R(x)$，但$\deg R(x)<\deg g(x)$，或$R(x)=0$

6. 設$f(x)$除以$ax+b\ (a\neq 0)$之商為$q(x)$，餘式為r，則

$f(x)$除以$x+\frac{b}{a}$之商為$\underline{aq(x)}$，餘式為$\underline{r}$。

$xf(x)$除以$ax+b$之商為$\underline{xq(x)+\frac{r}{a}}$，餘式為$\underline{-\frac{br}{a}}$。

$x^2f(x)$除以$ax+b$之商為$\underline{x^2q(x)+\frac{r}{a}x-\frac{br}{a^2}}$，餘式為$\underline{\frac{b^2r}{a^2}}$。

【鑑往核心】

1. 已知實係數多項式方程式$x^3+ax^2+bx+8=0$的三根相同，
請問b的值等於下列哪一個選項？
(1)6 (2)8 (3)10 (4)12 (5)14。 【101 數乙】

答：(4)

解：觀察常數項，知原式應為$(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$ $\therefore a=6$，$b=12$

2. 設a,b,c為實數，且二次多項式$f(x)=ax(x-1)+bx(x-3)+c(x-1)(x-3)$滿足
$f(0)=6$、$f(1)=2$、$f(3)=-2$。請問$a+b+c$等於下列哪一個選項？
(1) 0 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $-\frac{4}{3}$ 【102 數乙】

答：(2)

解：$f(0)=c(-1)(-3)=6 \Rightarrow c=2$

$f(1)=b(1)(-2)=2 \Rightarrow c=-1$

$f(3)=a(3)(2)=-2 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$ $\therefore$ $a+b+c=\frac{2}{3}$

3. 已知多項式$f(x)$除以x^2-1之餘式為$2x+1$。試選出正確的選項。
(1)$f(0)=1$ (2)$f(1)=3$ (3)$f(x)$可能為一次式 (4)$f(x)$可能為$4x^4+2x^2-3$
(5)$f(x)$可能為$4x^4+2x^3-3$。 【107 年學測】

答：(2)(3)(5)

解：$f(x)=\left(x^2-1\right)Q(x)+2x+1$

(1)無法得知$f(0)$ (2)$f(1)=0+2+1=3$ (3)當$Q(x)=0$時，成立 (4)(5)利用長除法

4. 已知實係數多項式$f(x)$除以x^2+2的餘式為$x+1$。若$xf(x)$除以x^2+2的餘式
為$ax+b$，則數對$(a,b)=$________。 【108 數乙】

答：$(1,-2)$

解：$f(x)=\left(x^2+2\right)Q(x)+x+1$

$xf(x)=\left(x^2+2\right)xQ(x)+\underbrace{x^2+x}_{\left(x^2+2\right)\times1+x-2}$，故$ax+b=x-2$

5. 設$f_1(x)$、$f_2(x)$為實係數三次多項式，$g(x)$為實係數二次多項式。
已知$f_1(x)$、$f_2(x)$除以$g(x)$的餘式分別為$r_1(x)$、$r_2(x)$，試選出正確的選項：
(1)$-f_1(x)$除以$g(x)$的餘式為$-r_1(x)$
(2)$f_1(x)+f_2(x)$除以$g(x)$的餘式為$r_1(x)+r_2(x)$
(3)$f_1(x)f_2(x)$除以$g(x)$的餘式為$r_1(x)r_2(x)$
(4)$f_1(x)$除以$-3g(x)$的餘式為$\dfrac{-1}{3}r_1(x)$
(5)$f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)$可被$g(x)$整除。 ［108 學測］

答：(1)(2)(5)

解：$f_1(x)=g(x)Q_1(x)+r_1(x)$、$f_2(x)=g(x)Q_2(x)+r_2(x)$

(1) $\left[-f_1(x)\right]=g(x)\left[-Q_1(x)\right]+\left[-r_1(x)\right]$

(2) $\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=g(x)\left[Q_1(x)+Q_2(x)\right]+\left[r_1(x)+r_2(x)\right]$

(3) 不一定，當$\deg\left[r_1(x)r_2(x)\right]<\deg\left[g(x)\right]$ 才正確

(4) $f_1(x)=\left[-3g(x)\right]\left[-\dfrac{1}{3}Q_1(x)\right]+r_1(x)$

(5) $f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)=g(x)\left[Q_1(x)r_2(x)-Q_2(x)r_1(x)\right]$

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. $f(x)$除以$x+k$的餘式為a，$(x-k)f(x)$除以$x+k$的餘式為$-6a$，求$k=$ ______。

2. 設$f(x)=x^4-3x^3+12x^2-5x-6$，則$f(1-3i)=$
(1) $-1-15i$ (2) $-1+15$ (3) $5-6i$ (4) $5+6i$ (5) $1-15i$
［學測模］

3. 多項式$(2x+3)^3\cdot(2x-1)^7$除以$(2x+1)^{10}$的餘式為$R(x)$，則$R(x)$的常數項為________。

【2019 最新學測模】

4. 設$f(x)$為整係數多項式，且$f\left(-1+\sqrt{2}\right)=2+5\sqrt{2}$，若$f(x)$除以$x^2+2x-1$的餘式為$ax+b$，則數對$(a,b)=$________。

【2019 最新學測模】

5. 已知多項式$f(x)$除以x^2-2x-3的餘式為$3x+1$，且多項式$xf(x)$除以x^2+x的餘式為$ax+b$，則數對$(a,b)=$________。

【2019 最新學測模】