

俞克斌杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測 (12) 綜合除法

【觀念核心】

綜合除法：

- ① 若除式為一次式，則長除法可用一種較簡便的方法記錄，稱為綜合除法。
 ② 設多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，
 則 $f(x)$ 除以 $x-a$ 之綜合除法演算過程如下（注意：缺項要補零）：

$$\begin{array}{r|l} a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 & + a_0 \\ + a \times a_n & + \cdots + a \times b_2 & + a \times b_1 \\ \hline a_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 & & r \end{array}$$

商式           餘式

其中 $\begin{cases} b_{n-1} = a_{n-1} + a \times a_n \\ \dots \\ b_1 = a_1 + a \times b_2 \\ r = a_0 + a \times b_1 \end{cases}$ 。

- ③ 因為除式為一次式，所以餘式必為常數。
 ④ $f(x)$ 除以 $ax-b$ 之綜合除法演算方式如下：
 先用綜合除法做 $f(x)$ 除以 $x - \frac{b}{a}$ ，得到商式 $q(x)$ 、餘式 r ，
 再利用除法原理： $f(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right)q(x) + r = (ax-b)\left(\frac{1}{a}q(x)\right) + r$
 表示 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的商式為 $\frac{1}{a}q(x)$ ，但餘式仍為 r 。
 ⑤ 連續使用綜合除法，可將 n 次多項式 $f(x)$ 改寫（變形）為另一多項形式
 如： $f(x) = c_n (x-a)^n + c_{n-1} (x-a)^{n-1} + \cdots + c_1 (x-a) + c_0$
 藉以：(1)求值 (2)求近似值 (3)求餘式

【鑑往核心】

1. 設 $f(x) = x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 25x^2 + 30x + 20$ ，則 $f(-7) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
【86學測】

答：6

解：利用綜合除法知：

$$\begin{array}{r|l}
 1 & +6 & -4 & +25 & +30 & +20 & \\
 & -7 & +7 & -21 & -28 & -14 & -7 \\
 \hline
 1 & -1 & +3 & +4 & +2 & +6 & \\
 \hline
 \end{array}$$

故 $f(-7) = 6$

2. 設 $f(x) = 1250x^6 - 2790x^5 - 3125x^4 + 707x^3 + 100x^2 + 45x - 62$ ，
則 $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 [79 日自]

答：217

解：利用綜合除法

$$\begin{array}{r|l}
 1250 & -2790 & -3125 & +707 & +100 & +45 & -62 & \\
 & +3750 & +2880 & -735 & -84 & +48 & +279 & 3 \\
 \hline
 1250 & +960 & -245 & +28 & +16 & +93 & +217 & \\
 \hline
 \end{array}$$

3. 設 $f(x) = x^4 + 7x^3 + 11x^2 - 3x - 18$ ，求 $s = f(f(1)) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 [71 日自]

答：-8

解： $s = f(f(1)) = f(-2) = -8$ (可利用綜合除法計算)

4. 設 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x$ 。

若 $f(x) = a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e$ 。

其中 a, b, c, d, e 皆為常數，則 $(a, b, c, d, e) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[81 大學聯考]

答： $(a, b, c, d, e) = (1, -2, 0, -1, 2)$

解：利用「綜合除法」：

可知： $a=1$ 、 $b=-2$ 、 $c=0$ 、
 $d=-1$ 、 $e=2$

$$\begin{array}{r|l}
 1 & +2 & +0 & -3 & +0 & \\
 & -1 & -1 & +1 & +2 & -1 \\
 \hline
 1 & +1 & -1 & -2 & +2 & \\
 & -1 & +0 & +1 & & \\
 \hline
 1 & +0 & -1 & -1 & & \\
 & -1 & +1 & & & \\
 \hline
 1 & -1 & +0 & & & \\
 & -1 & & & & \\
 \hline
 1 & -2 & & & & \\
 & & & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 設多項式 $f(x) = x^4 - 3x^2 - x + 7 = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 + d(x-2) + e$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 、 e 為實數，下列哪些選項是正確的？
- (A) $a+b+c+d+e=58$
(B) $f(2.001) > 0$
(C) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 得餘式為 $19x+9$
(D) $y=f(x)$ 的圖形與 y 軸的交點在 x 軸的上方
(E) 方程式 $f(x)=0$ 在 $x > 2$ 的範圍無實根

2. 試求 $12^5 - 7 \times 12^4 - 58 \times 12^3 + 16 \times 12^2 - 460 \times 12 - 260$ 之值 = _____。

俞
斌
數
學

3. 已知 $f(x) = kx^4 + 5x^3 - x^2 - 3x + 2$.

且 $f(x)$ 經整理後可表示為

$$f(x) = a(x+2)^4 + b(x+2)^3 + c(x+2)^2 + d(x+2) - 4 .$$

則 d 之值為 _____ .

4. 若多項式

$$a(3x-5)^5 + b(3x-5)^4 + c(3x-5)^3 + d(3x-5)^2 + e(3x-5) + k .$$

$$= (5x+1)^5 - 4(5x+1)^4 - 72(5x+1)^3 - 56(5x+1)^2 + 15(5x+1) + 10 .$$

$a, b, c, d, e, k \in \mathbb{R}$ 為實數，試求 $a+b+c+d+e+k =$ _____ .

俞
斌
數
學

5. (1) 設 $f(x) = 48x^4 + 96x^3 + 72x^2 + 20x + 6$
 $= a(2x+1)^4 + b(2x+1)^3 + c(2x+1)^2 + d(2x+1) + e$.
求 a, b, c, d, e .
- (2) 接上題，求 $f(-0.4999)$ 之近似值準確到小數第四位。
- (3) 求 $(2x+1)^2$ 除 $f(x)$ 之餘式。

6. 多項式函數 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 30x + 25$.
試問 $f(\log_2 5)$ 最接近下列哪個整數？ ($\log 2 \approx 0.3010$)
- (1) 8 (2) 10 (3) 12 (4) 14 (5) 16

[維中]

克
斌
數
學

7. 設 $f(x) = (3x-1)^4 - 4(3x-1)^3 - 15(3x-1)^2 + 60(3x-1) + 9$.
則 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為_____。

[2019 最新學測模]

8. 設多項式函數 $f(x) = 24x^4 + 48x^3 + 36x^2 + 19x + 4$. 則 $f(-1.5)$ 的值為_____。

[2019 最新學測模]

俞克斌數學

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利