



俞克斌杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測

(13) 餘式定理

【觀念核心】

1. 餘式定理：設 $f(x)$ 是一多項式， $\deg f(x) \geq 1$ ， $\alpha \in C$ ，
則以 $x - \alpha$ 除 $f(x)$ 之餘式為 $f(\alpha)$ 。

餘式的階梯假設法：

- ① 除式為 $(x - \alpha)(x - \beta)$ 時

$$\begin{aligned} \text{設 } f(x) &= (x - \alpha)(x - \beta)q(x) + ax + b \\ &= (x - \alpha)(x - \beta)q(x) + a(x - \alpha) + f(\alpha) \end{aligned}$$

- ② 除式為 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ 時，

$$\text{設 } f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)q(x) + a(x - \alpha)(x - \beta) + b(x - \alpha) + f(\alpha)$$

- ③ 除式為 $x^{k-1} \pm x^{k-2} + x^{k-3} \pm x^{k-4} + \dots \pm 1$ 時，考慮以 $x^k \pm 1$ 除之

- (a) $n \in N$ ，

$$x^n - y^n = (x - y) \left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} \right)$$

- (b) n 為正奇數時，

$$x^n + y^n = (x + y) \left(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1} \right)$$

- (c) n 為正偶數時，

$$x^n - y^n = (x + y) \left(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1} \right)$$

* $f(x^2) + xg(x^2)$ 除以 $x^2 - a$ 之餘式為 $f(a) + xg(a)$

$f(x^3) + xg(x^3) + x^2h(x^3)$ 除以 $x^3 - a$ 之餘式為 $f(a) + xg(a) + x^2h(a)$

2. 因式定理：設 $f(x)$ 為 x 之多項式， $a, b \in C$ ，則

(1) $(x - a) | f(x) \Leftrightarrow f(a) = 0$

(2) $(x - a)(x - b) | f(x) \Leftrightarrow f(a) = f(b) = 0 \quad (a \neq b)$

* $a, b \in C, a \neq 0, (ax - b) | f(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$

【鑑往核心】

1. 已知實係數多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 14x + 13$ 的餘式為 $ax + b$ ，

且 $f(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 4，則 $a + b$ 的值為何？

- (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 4 (5) 13。

[107 數乙]

答：(4)

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利

解： $f(x) = (x-1)(x-13)Q_1(x) + ax + b = (x-1)Q_2(x) + 4$ ，
故 $f(1) = a + b = 4$

2. 若 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ ，
則多項式 $g(x) = f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 所得的餘式為_____。

【92學測】

答：11

解： $f(f(x)) = (x-2)Q(x) + r$ 令 $x=2 \Rightarrow r = f(f(2)) = f(3) = 11$

3. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 5x + 4$ ，餘式為 $x + 2$ ；除以 $x^2 - 5x + 6$ ，餘式為 $3x + 4$ 。
則多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 4x + 3$ ，餘式為_____。

【90學測】

答： $5x - 2$

解： $f(x) = (x^2 - 5x + 4)Q_1(x) + x + 2 \dots\dots\dots(1)$

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)Q_2(x) + 3x + 4 \dots\dots\dots(2)$

設 $f(x) = (x^2 - 4x + 3)Q_3(x) + (ax + b) \dots\dots\dots(3)$

令 $x=1$ 代入(1)(3)： $a + b = 3$ 令 $x=3$ 代入(2)(3)： $3a + b = 13$

$\Rightarrow a = 5, b = -2$ 故餘式為 $5x - 2$

4. 設 $f(x)$ 為一未知的實係數多項式，
但知道 $f(x)$ 除以 $(x-5)(x-6)^2$ 的餘式為 $5x^2 + 6x + 7$ 。
根據上述所給條件，請選出正確的選項。

- (1) 可求出 $f(0)$ 之值 (2) 可求出 $f(11)$ 之值
(3) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)^2$ 的餘式 (4) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-6)^2$ 的餘式
(5) 可求出 $f(x)$ 除以 $(x-5)(x-6)$ 的餘式

【105數乙】

答：(4)(5)

解：(4) $f(x) = (x-5)(x-6)^2 Q(x) + 5x^2 + 6x + 7$
 $= (x-5)(x-6)^2 Q(x) + 5(x-6)^2 + 66x - 173$

(5) $f(x) = (x-5)(x-6)^2 Q(x) + 5x^2 + 6x + 7$
 $= (x-5)(x-6)^2 Q(x) + 5(x-5)(x-6) + 61x - 143$

5. 設 $f(x)$ 一實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)^2$ 的餘式為 $(x-2)^2 + g(x)$ ，
其中 $g(x)$ 為一次多項式。請選擇正確的選項。

- (1) 若知道 $f(1)$ 及 $f(2)$ ，則可求出 $g(x)$
(2) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式是 $g(2)$
(3) $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式是 $g(1)$
(4) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 $g(x)$
(5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式是 $x-2+g(x)$

【104數乙】

答：(1)(2)(4)

解：(4) $f(x) = (x-1)(x-2)^2 Q(x) + (x-2)^2 + g(x)$ ……對

(1) $f(x) = (x-1)(x-2)^2 Q(x) + (x-2)^2 + ax + b$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 + a + b = h \text{ 已知} \\ f(2) = 0 + 2a + b = k \text{ 已知} \end{array} \right\} \text{ 可得 } a, b \text{……對}$$

(2) $f(x) = (x-1)(x-2)^2 Q(x) + (x-2)^2 + a(x-2) + g(2)$ ……對

(5) $f(x) = (x-1)(x-2)^2 Q(x) + (x-1)(x-2) + (a-1)x + (b+2)$

而 $(a-1)x + (b+2) = (-x+2) + g(x)$

(3) $f(x) = (x-1)(x-2)^2 Q(x) + (x-1)(x-2) + (a-1)(x-1) + a + b + 1$

而 $a + b + 1 = g(1) + 1$

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，若以 $x^2 + x - 2$ 除之餘 $12x - 3$ ，以 $x^2 - x - 2$ 除之餘 $8x + 9$ ，則 $f(x)$ 除以 $57x - 228$ 的餘式為_____。

2. 已知實係數多項式 $f(x)$ 之次數不低於二次，若 $f(x)$ 除以 $x - 5$ 的餘式為 36， $f(x)$ 除以 $x - 2$ 的商式為 $g(x)$ 且餘式為 3，則 $g(x)$ 除以 $x - 5$ 的餘式為_____。

【學測模】

俞克斌
數學

3. 俊賢想求 7386027^{10} 除以 101×103 的餘數 R ，數學老師提示他可以利用多項式的除法，
即 $(7x^3 + 38x^2 + 60x + 27)^{10} = (x+1)(x+3)Q(x) + (ax+b)$ 。
試求餘數 $R = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[全國模]

4. 設多項式 $f(x)$ 的奇數項係數和為 16，
若 $f(x)$ 除以 $x^2 + 2$ 的商式為 $q(x)$ ，餘式為 $7x + 8$
且 $q(x)$ 除以 $x - 1$ 的餘式為 -3 。
求 $f(x)$ 除以 $x + 1$ 的餘式。

[雄中]

5. 設 $f(x)$ 被 $x - 1$ 除之餘式為 4，被 $x^2 - 4x + 5$ 除之餘式為 $px + q$ ，
被 $(x - 1)(x^2 - 4x + 5)$ 除之餘式為 $(x - r)^2$ ，求 p, q, r 之值。

6. 多項式 $f(x)$ 以 $(x-1)^2$ 及 $(x-2)^2$ 除之所得之餘式分別為 $5x+1$ 及 $6x+1$ ，求以 $(x-1)(x-2)^2$ 除 $f(x)$ 之餘式。

7. 設實係數多項式 $f(x)$ 除以 $(x-b)(x-c)$ 、 $(x-c)(x-a)$ 、 $(x-a)(x-b)$ 餘式分別是 $3x-1$ 、 $x+1$ 、 $2x+3$ ，求：
(1) 數對 $(a,b,c) = ?$
(2) $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 所得餘式。

[雄中]

俞克斌數學

8. 以 $x^2 + 2x - 8$ 除多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 分別得餘式 $3x + 1$ 、 $2x - 5$ ，試選出正確的選項：
- (1) $f(0) = 1$
 - (2) $2f(x) + 3g(x)$ 被 $x - 2$ 除的餘式為 11
 - (3) $xf(x) + 2g(x)$ 被 $x - 1$ 除的餘式為 -2
 - (4) $f(x) + g(x)$ 被 $x^2 + 2x - 8$ 除的餘式為 $5x - 4$
 - (5) $x^2 f(x) + xg(x)$ 被 $x^2 + 2x - 8$ 除的餘式為 $25x - 24$ 。

【2019 最新學測模】

9. $f(x)$ 是三次實係數多項式，
若 $f(x)$ 除以 $x^2 + x - 2$ 的餘式是 $2x - 1$ ，且 $f(x)$ 除以 $x^2 + x$ 的餘式是 3，
則 $f(x)$ 除以 $x^2 - 2$ 的餘式為何？
- (1) 1 (2) $2x + 1$ (3) $3x - 1$ (4) $4x - 1$ (5) $4x - 3$ 。

【2019 最新學測模】

俞
斌
數
學

10. 已知多項式 $f(x)$ ，經三次的除法運算，其結果分述如下：

① $f(x)$ 除以 $x-2$ ，得商式為 $Q_1(x)$ ，餘式為 1

② $Q_1(x)$ 除以 $x-2$ ，得商式為 $Q_2(x)$ ，餘式為 2

③ $Q_2(x)$ 除以 $x-2$ ，得商式為 $x-3$ ，餘式為 3

試選出正確的選項：

(1) $f(x)$ 是三次多項式 (2) $f(2)=1$ (3) $f(x)$ 除以 $Q_1(x)$ 的餘式為 1

(4) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式為 $Q_2(x)$ (5) $f(2+\sqrt{2})=11$ 。

[2019 最新學測模]



俞克斌數學

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利